H. PERRAUDEAU

soluciones de ejercicios

del curso elemental de matemáticas superiores

tomos 1 al 3

de

J. QUINET

SERIE POLITECNICA

Soluciones de Ejercicios del Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMOS I AL III

H. PERRAUDEAU

Soluciones de Ejercicios del Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMOS I al III

DE

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

1968

PARANINFO MADRID

Traducido por
ANGEL CALAVIA JAIME

© 1966, DUNOD

Depósito Legal: Z. 31 - 1968

Impreso en España
Printed in Spain

PARANINFO Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza, 1968

PROLOGO

Esta obra no es más que el complemento de la del señor J. QUINET, *Curso Elemental de Matemáticas Superiores.*

Las soluciones en una gran parte de los ejercicios propuestos en los tres primeros tomos de esta obra se reúnen aquí de diferentes formas.

En general, se dan los cálculos detallados para una solución de cada tipo de problema propuesto; otras soluciones figuran sin comentario. En ciertos cálculos, evaluaciones de integrales, por ejemplo, hemos dado una solución solamente, incluso si el resultado puede expresarse de varias formas diferentes. Finalmente, ciertos problemas análogos a los tratados ya en el curso se han omitido *voluntariamente,* a petición de profesores, para permitir el trabajo personal.

En los resultados numéricos, profundizamos más en el método de cálculo que en la gran precisión del resultado. Como el objeto de esta obra es la *práctica* de las matemáticas, se ha utilizado la regla de cálculo siempre que ha sido posible.

Precisemos también ciertas notaciones acordes con normas recientemente adoptadas [1].

el logaritmo decimal se escribe lg (Ejercicio n.° 3-2 por ej.)
el logaritmo neperiano se escribe ln (Ejercicio n.° 3-4 por ej.)
el logaritmo con base a se escribe $\log_a$ (Ejercicio n.° 3-10 por ej.)

Los conceptos trigonométricos se escriben:

seno: sen coseno: cos tangente: tg cotangente: cot

Señalemos también los signos siguientes:

$\approx$ aproximadamente igual a...

$\simeq$ asintóticamente igual a...

$\sim$ proporcional...

$\equiv$ idéntico a...

(1) Está prevista la adopción de los mismos símbolos en las próximas ediciones del Curso de M. J. Quinet.

En el trazado de curvas, y para obtener una mayor claridad en el cuadro de valores particulares, se ha ampliado mucho este cuadro. De este modo, centrándose en el cuadro el eje de las y, frecuentemente ha sido imposible centrar los demás valores para evitar una figura demasiado grande. A veces las señales indicadas sobre las mismas permiten al lector encontrarlos fácilmente. (Figura 9-16, por ejemplo). En una obra de este tipo los errores materiales son casi inevitables. Algunos, puestos de manifiesto por nuestros lectores, lo que agradecemos, se han corregido en esta nueva edición. Quedaremos infinitamente agradecidos a aquellos que se tomen la molestia de indicarnos los errores que hayan podido subsistir, a pesar de las comprobaciones efectuadas. Hemos conservado j como símbolo de valores imaginarios.

Deseando que esta obra complemente con utilidad la del señor J. QUINET, rendimos homenaje a la memoria de quien supo simplificar la aridez de las matemáticas y amar el lenguaje de las cifras. Séanos permitido también agradecer aquí al señor Berranger por la preciosa ayuda que nos ha prestado: expresándole aquí nuestro vivo reconocimiento. Agradecemos también a la Librería Paraninfo el cuidado con que ha editado este libro.

H. PERRAUDEAU.

INDICE DE MATERIAS

TOMO I

Complementos de álgebra
Derivadas y sus aplicaciones

CAPÍTULO II. — *Complementos de álgebra superior* ... ... Pág. 13
— III. — *Estudio de nuevas funciones* 15
— VI. — *Derivadas de funciones de función* 17
— VII. — *Aplicación de las derivadas* 27
— VIII. — *Problemas prácticos de determinación del máximo o mínimo* 33
— IX. — *Trazado de curvas* 41
— X. — *Otras derivadas* 69

TOMO II

Desarrollos en serie
Cálculo de valores imaginarios
Cálculo diferencial

CAPÍTULO I. — *Desarrollo en serie* 81
— II. — *Expresiones indeterminadas* 89
— III. — *Estudio de series* 99
— IV y V. — *Cálculo de valores imaginarios* 109
— VI. — *Infinitésimos* 117
— VII. — *Diferenciales* 125
— VIII. — *Cálculo de diferenciales* 133
— IX. — *Diferenciales de orden superior* 137
— X. — *Otras diferenciales* 145
— XI. — *Diferenciales de funciones de varias variables independientes* 149
Problemas 161
— XII. — *Curvatura y radios de curvatura* 167

TOMO III

Cáculo integral y primeras aplicaciones

CAPÍTULO	IV.	*Integración por sustitución*	177
—	V.	*Integración por partes*	187
—	VI.	*Expresiones con radicales y trinomios*	193
—	VII.	*Fracciones racionales*	201
		Verificaciones de fracciones racionales	210
—	VIII.	*Integrales trigonométricas*	215
		Verificación de integrales	220
—	IX.	*Integraciones por desarrollo*	223
		Verificación de integrales	238
—	XI.	*Cálculo de superficies*	245
—	XIII.	*Cálculo de longitudes de curvas*	251
—	XIV.	*Cálculo de volúmenes de revolución*	255
—	XV.	*Superficies laterales de volúmenes de revolución*	263
—	XVI.	*Centros de gravedad*	265
		Varios problemas de integración	269

TOMO I

COMPLEMENTOS DE ALGEBRA

Derivadas y sus aplicaciones

CAPITULO II

COMPLEMENTOS DE ALGEBRA SUPERIOR

2-1. $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

2-2. $4a^2 + 12ab + 9b^2$.

2-3. $4a^2 - 12ab + 9b^2$.

2-4. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

2-5. $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.

2-6. $a^{-4} + b^{-4} + 2(ab)^{-1}\,[2a^{-2} + 3(ab)^{-1} + 2b^{-2}]$.

2-7. $\frac{8}{27}a^3 + a^2b + \frac{9}{8}ab^2 + \frac{27}{64}b^3$.

2-8. $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab + 16ac + 24bc$.

2-9. Igual sistema que para el ejercicio anterior.

2-10. $\frac{x^4}{a^4} + 4\frac{x^3y}{a^3b} + 6\left(\frac{xy}{ab}\right)^2 + 4\frac{xy^3}{ab^3} + \frac{y^4}{b^4}$.

2-11. $e^{5x/a} + e^{-5x/a} + 5\,(e^{3x/a} + e^{-3x/a}) + 10\,(e^{x/a} + e^{-x/a})$.

2-12. $e^{12x} - 6e^{7x} + 15e^{2x} - 20e^{-3x} + 15e^{-8x} - 6e^{-13x} + e^{-18x}$.

Valores de determinantes

2-13. $x = 0 \quad z = +1$.

2-14. $x = 1{,}505 \quad z = 2{,}675$.

Poner: $\frac{1}{x} = X$ y $\frac{1}{z} = Z$.

2-15. $x = \frac{1}{13}, \quad y = \frac{6}{13}, \quad z = -\frac{2}{13}.$

2-16. $x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = +1.$

2-17. 1.

2-18. La tercera columna es el doble de la anterior. Respuesta: 2.

2-19. 1.

2-20. El determinante es nulo, pues dos de sus líneas son idénticas (*).

2-21. — 18.

2-22. Respuesta doble de la anterior.

2-23. — 18.

2-24. Determinante nulo, pues la primera y tercera líneas son idénticas.

2-25. Determinandte nulo: la segunda columna es doble de la primera.

2-26. Determinante nulo.

2-27. Determinante nulo.

2-28 Determinante nulo.

(*) **Nota del Traductor.** — Línea significa fila o columna, indistintamente.

CAPITULO III

ESTUDIO DE NUEVAS FUNCIONES

3-1. Solución detallada:

$$\ln y = 2x \ln 5 \qquad 2 \ln 5 = 2 \times 1{,}6 = 3{,}2$$
$$y = e^{3{,}2x} \qquad b = 3{,}2.$$

3-2. $x = 0{,}714 \lg y.$

3-3. 1er caso: $\lg y = 5 \quad y = 10^5.$
2.º caso: $\lg y = 5 \lg e \quad y = 148.$

3-4. $x = -\ln \left(1 - \frac{y}{K}\right)^3.$

3-5. $x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{arc sen } y}\right)^2}.$

3-6. $x = \pm \sqrt{\cot y - 1}.$

3-7. para $n = 2 \quad y = 2{,}25.$
para $n = 3 \quad y = 2{,}37,$
para $n = 4 \quad y = 2{,}44.$

3-8. $x = \frac{1}{2} \ln (\text{arc sen } y).$

3-9. $x = \sqrt{LC}\ (\text{arc cos } y - \varphi).$

3-10. Demostración:

$$\log_b a \times \log_a b = 1.$$

Por consiguiente:

$$a = b^{1/\log_a b} \ (1) \qquad b = a^{1/\log_b a} \ (2).$$

Si se sustituye (2) en (1), se tiene:

$$a = a^{1/\log_b a \ \times \ \log_a b} = a^1.$$

Por consiguiente la ecuación propuesta es correcta.

3-11. Para trazar esta curva, es preciso sumar las ordenadas de las dos funciones:

$$y_1 = 2^x, \quad y_2 = 2^{-x}.$$

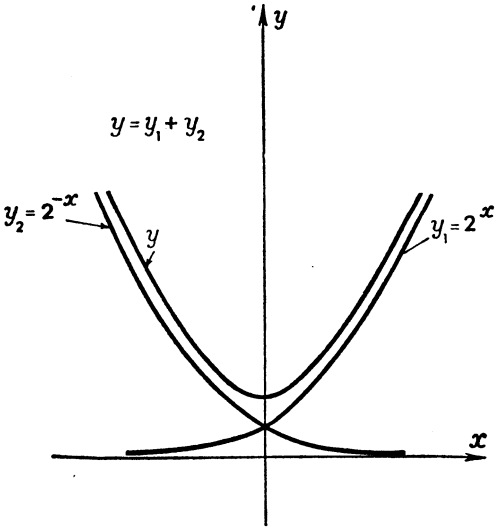


FIG. 3-11

3-12. $2^{x-1} = \dfrac{2^x}{2}$. Ahora bien $2^x = 2 \times 2^{x-1} = 2^1 \times 2^{x-1}$.

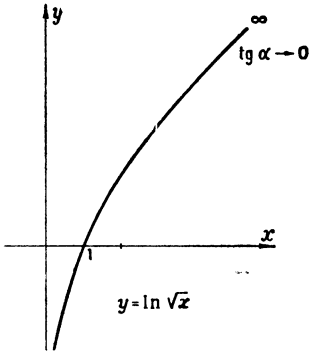


FIG. 3-13

Por consiguiente:

$$2^x = 2^{(1+x-1)} \equiv 2^x.$$

3-13. La tendencia general de esta curva es la de $y = \lg x$, pero su crecimiento es más lento.

CAPITULO VI

DERIVADAS DE FUNCIONES DE FUNCION

6-1. $y' = (24x + 20)(3x^2 + 5x - 1)^3$.

6-2. $y' = (5x - \frac{3}{2})(5x^2 - 3x)^{-1/2}$.

6-3. $y' = -\dfrac{12x^3 - 4x}{(3x^4 - 2x^2 + 1)^2}$.

6-4. $y' = -2x^{-3} \cdot \cos x^{-2}$.

6-5. Expresión de la forma $y = u^2$:

$$y' = 2x \cdot \operatorname{sen} 2x^2.$$

6-6. $y' = -\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \cos^2 \sqrt{1-4x^2}}$.

6-7. Cálculo detallado:

$$y = \frac{1}{u}, \quad y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$u = \cos v, \quad v = \sqrt{x},$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad u' = -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}},$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}}.$$

6-8. $y' = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x$.

6-9. $y' = -\dfrac{3}{2}(1 - 3x)^{-1/2} \cdot e^{(1-3x)1/2}$.

6-10. Expresión de la forma $y = e^u$:

$$y' = -\frac{e^{\text{tg } 1/x}}{x^2 \cdot \cos^2 1/x}.$$

6-11. $y' = 4 \cot 4x.$

6-12. Expresión de la forma $y = \ln u.$
Recuérdese que $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x.$

6-13. $y' = \cos x.$

6-14. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - (\ln)^2}}.$

6-15. $y' = -\dfrac{1}{2\cos^2 x} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{tg } x}} \times \dfrac{1}{2 - \text{tg } x}.$

6-16. Expresión de la forma $u \cdot v$:
$u' = 4e^{4x} \quad v' = -3 \text{ sen } 3x,$
$y' = e^{4x}(4 \cos 3x - 3 \text{ sen } 3x).$

6-17. Cuidado con el cálculo de:

$$v' = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

$$y' = \frac{5e^{-5x}}{\cos 5x}\left(\frac{1}{\cos 5x} - \text{sen } 5x\right).$$

6-18. $y' = e^{2x}\left(\dfrac{1}{x} + 2\ln 3x\right).$

6-19. $y' = \dfrac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{2 \text{ arc sen } x}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$

6-20. $y' = -\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{x} \text{arc tg } \dfrac{1}{x}\right).$

6-21. Expresión de la forma $y = u/v$:

$$y' = \left(\frac{1}{\text{arc tg } 3x}\right)\left(\frac{2 \text{ arc tg } 3x}{1 + 4x^2} - \frac{3 \text{ arc tg } 2x}{1 + 9x^2}\right).$$

6-22. $y' = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{3}{2} \left(\dfrac{1}{\ln 3x} \right)^2$.

ya que $\ln 3x - 2x = \ln \dfrac{3}{2}$.

6-23. $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \left(6 \cos^2 x - 1 - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)$.

6-24. $y' = \dfrac{3x + 5}{2\sqrt{x + 2}}$.

6-25. $y' = \dfrac{x + 2}{(2x + 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}}$.

6-26. $y' = \dfrac{1}{2}(1 - x)^{1/3}(1 + x)^{-1/2} - \dfrac{1}{3}(1 - x)^{-2/3}(1 + x)^{1/2}$.

6-27. Poner: $y = u + v$, con $v = 1/u$.

6-28. $y' = (1 + 4x^2)^{-3/2}$.

6-29. $y' = \dfrac{2\sqrt{1 - x}}{x} - \dfrac{\ln x^2}{2\sqrt{1 - x}}$

6-30. $y' = \dfrac{x}{2(1 + x^2)}$.

6-31. Leer: $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

Resolver: $y = \ln u$.

6-32. $y' = -\dfrac{3}{x} \left(\ln \dfrac{1}{x} \right)^2$.

6-33. $y' = -\dfrac{16x}{1 - 4x^2} (\ln \sqrt{1 - 4x^2})^3$.

6-34. $y' = 5(\ln e^x)^4 \equiv 5x^4$.

6-35. $y' = e^{x \operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x + x \cos x)$.

6-36. $y' = 2x \cdot e^{x^2}$.

6-37. $y = e^u$ poner $u = x^{-1/2}$.

6-38. $y' = \dfrac{e^x}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \cos\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$.

6-39. $y' = -2\, e^{2x} \operatorname{sen} e^{2x}$.

6-40. $y' = \dfrac{1 - 1/x^2}{\cos^2 (x + 1/x)}$.

6-41. $y' = -\dfrac{2}{x^2} \cdot \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}$.

6-42. $y' = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}} \cdot \cos^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{x}$.

6-43. $y' = -\dfrac{5}{2x^2}\left(\operatorname{tg}^6 \dfrac{1}{2x} + \operatorname{tg}^4 \dfrac{1}{2x}\right)$.

6-44. $y' = 6x^3 \cdot \operatorname{sen} x^4 \cdot \operatorname{sen} 2x^4$.

6-45. Poner: $y = u^4$.

6-46. $y' = 3e^x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2 e^x}{\cos^4 e^x}$.

6-47. $y' = 2(1 + \cos 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x)$.

6-48. $y' = -e^{-2x}(2 \cos 3x + 3 \operatorname{sen} 3x)$.

6-49. $y' = \operatorname{tg} 2x \left(\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} 2x + 4 \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 2x}\right)$.

6-50. $y' = 2e^{2x}(1 - e^{4x})^{-1/2}$.

6-51. $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - (\ln)^2}}$.

6-52. Representar $u = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

6-53. $y = \operatorname{arc\,sen} u \qquad u' = -\dfrac{1}{2} x^{-3/2}$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{-\frac{1}{2} x^{-3/2}}{(1 - 1/x)^{1/2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x - 1}}.$$

6-54. $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

6-55. $y' = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$.

6-56. $y' = 1$.

6-57. El arco cuyo seno es el seno de x, es x.
Su derivada es 1.

6-58. $y' = \operatorname{sen} 2[(x-1)\sqrt{x}] \cdot \left(\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}\right)$.

6-59. $y' = \dfrac{4}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\ln x^2)}{\cos^3(\ln x^2)}$.

6-60. $y' = 4^x \cdot e^{1/x}\left(\ln 4 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

6-61. $y' = 4\cos x - 2\operatorname{sen} x$.

6-62. $y' = \dfrac{2}{x^2} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{2}{x} \cdot \cos^2\dfrac{1}{x}$.

6-63. $y' = 2(\cos 2x - \operatorname{sen} x)$.

6-64. $y' = \dfrac{1}{x \ln x}$.

6-65. $y' = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

6-66. $y' = (\ln x)^2 + \ln x^2$.

6-67. $y' = 6\sqrt{x} + 8x + 1$.

6-68. $y' = 7^{-x-1} \cdot x^{-2} \cdot \ln 7$.

6-69. $y' = \dfrac{2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2}{2\sqrt{x}}$.

6-70. Poner: $y = a^u$.

6-71. $y' = -\dfrac{\ln 2}{x} \cdot 2^{1/\ln x} \cdot (\ln x)^{-2}$.

6-72. $y' = \dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{x-1}{x+1}$.

6-73. $y' = \dfrac{3x^2+2}{x^2+x}$.

6-74. Poner aquí: $y = u^3$, $y' = 3 \cdot u^2 \cdot u'_x$.

$$y' = -\frac{3}{2(1-x)}(\ln \sqrt{1-x})^2.$$

6-75. $y' = 8 \operatorname{sen}^2 4x \cdot \operatorname{sen} 8x$.

6-76. $y' = 2(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$.

6-77. $y' = -\dfrac{4a^2x}{x^4-a^4}$.

6-78. $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

6-79. $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

6-80. Después de la simplificación por $(2x+1)$ en el transcurso del cálculo:

$$y' = \frac{-8x^2 + (2x+1)^2}{(2x+1)^3\sqrt{4x+1}}.$$

6-81. $y' = 6 \operatorname{sen} 2x(1 - 4 \operatorname{sen}^2 x)$.

6-82. $y' = \dfrac{2x}{\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{sen}^2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

6-83. $y' = -8x\dfrac{\cot(x^2-1)}{\operatorname{sen}^4(x^2-1)}$.

6-84. Expresión de la forma $y = u \times v$.

6-85. $y' = 2\cos 2x \cdot e^{\operatorname{sen} 2x}(1 + \operatorname{sen} 2x)$.

6-86. $y' = e^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\cos x^2}{\cos^2 x} - 2x \operatorname{sen} x^2\right)$.

6-87. $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$.

6-88. $y' = 2\dfrac{(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}\,(1+x)}$.

Cálculo de derivadas segundas

6-89. $y'' = -e^{2x}(5\cos 3x + 12\operatorname{sen} 3x)$.

6-90. $y'' = 12\cos 2x \cdot \cos 3x - 13\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x$.

6-91. $y'' = -\dfrac{3x+1}{4x^{3/2}(1+x)^2}$.

6-92. $y'' = x^{-2}$.

6-93. $y' = x^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-1}$.

$y'' = -\frac{1}{2}x^{-2}$.

6-94. $y'' = 12x^2 - x^{-3/2}$.

6-95. $y'' = 2(x-1)^{-3}$.

6-96. $y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.

6-97. $y'' = 2\ln x + 3$.

6-98. $y'' = 2\cos 2x$.

6-99. $y'' = \dfrac{2}{\cos^4 x}(1 + 2\operatorname{sen}^2 x)$.

6-100. $y'' = 16e^{4x}$.

6-101. $y'' = x^{-3}(2\ln x - 3)$.

Se había obtenido: $y' = x^{-2}(1 - \ln x)$.

6-102. $y'' = 4(1+x)^{-3}$.

6-103. $y'' = 8x \cdot \dfrac{x^2-3}{(1+x^2)^3}$.

6-104. $y'' = 6x \cdot (x-1)^{-4}$.

6-105. $y'' = \frac{1}{2}\cos x$.

6-106. $y'' = 2(1+x^2)^{-2}$.

Cálculo de derivadas terceras

6-107. $y' = e^{x^2} \cdot 2x,$

$y'' = 2e^{x^2}(2x^2 + 1),$

$y''' = 4x \cdot e^{x^2}(2x^2 + 3).$

6-108. $y''' = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6).$

6-109. $y''' = -8x(1 + x^2)^{-3}.$

La segunda derivada se ha calculado en **6-106.**

6-110. $y''' = e^{-x}(11 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x).$

6-111. $y''' = \frac{8}{27} \cdot x^{-7/3}.$

6-112. $y' = -(1 - x^2)^{-1/2}$

$y'' = -x(1 - x^2)^{-3/2}$

$y''' = -(1 - x^2)^{-3/2}[1 + 3x^2(1 - x^2)^{-1}].$

6-113. $y''' = (1 + x^2)^{-3/2}[-1 + 3x^2(1 + x^2)^{-1}].$

6-114. $y''' = 63 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x - 62 \cos 3x \cdot \cos 2x$

6-115. Transformar y en:

$$y = \frac{2\cos x}{3 - 4\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{4\cos^2 x - 1} = \frac{X}{X^2 - 1}$$

$$y''' = \frac{2\operatorname{sen} x}{(4\cos^2 x - 1)^4}(-64\cos^6 x + 16\cos^4 x + 484\cos^2 x + 23).$$

6-116. Transformar y en:

$$y = \frac{2X}{1 - X} = \frac{-2(1 - X)}{1 - X} + \frac{2}{1 - X} = \frac{2}{1 - X} - 2$$

con $X = \operatorname{tg}^2 x,$

$$y''' = \frac{16 \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg}^2 x - 1)}(5\operatorname{tg}^6 x + 19\operatorname{tg}^4 x + 19\operatorname{tg}^2 x + 5).$$

6-117. Este ejercicio queda libre.

6-118. $y''' = \dfrac{48x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$.

6-119. Transformar $y = X^3$:

$$y''' = 6X'^3 + 18X \cdot X' \cdot X'' + 3X^2 \cdot X'''$$

$$y''' = 48x^3(10\,\mathrm{tg}^6 x^2 + 25\,\mathrm{tg}^4 x^2 + 10\,\mathrm{tg}^2 x^2 + 1) + 72x\,\mathrm{tg}x^2(2\,\mathrm{tg}^4 x^2 + 3\,\mathrm{tg}^2 x^2 + 1).$$

Cálculo de derivadas enésimas

6-120. $y^{(n)} = y^{(n-4)}$ para $n > 4$.

6-121. $y^{(n)} = (-1)^n\, n!\, x^{-n-1}$.

6-122. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

6-123. $y^{(n)} = 2^n \cdot e^{2x+1}$.

6-124. $y^{(n)} = (-1)^n \cdot (n+1)!\, x^{-n} \cdot y$.

6-125. $y^{(n)} = m^n \,\mathrm{sen}\left(mx + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

6-126. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot x^{-n}(n-1)!$

6-127. $y^{(n)} = (-1)^n \cdot x^{-n}(n-1)!$

CAPITULO VII

APLICACION DE LAS DERIVADAS

7-1. Los dos puntos son $\pm$ 3.

7-2. La función y corta al eje x por 3 puntos:

$x_1 = 0 \quad x_2 = +1 \quad x_3 = -2$

$y_1' = -2 \quad y_2' = +3 \quad y_3' = +6.$

7-3. Pendiente de la recta: 10.

Es necesario $y' = 10$. Sea para: $x_1 = +2$, $x_2 = -5/3$.

7-4. $y' = 1$.

7-5. $x_1 = \pi/2, \quad x_2 = 3\pi/2, \quad x_3 = 9^\circ\, 30'$.

7-6. $x = n\pi/2$.

7-7. Para $y = 5 \quad x = 2{,}1$,

$y' = 3x^2 - 2 \quad y'_{(2,1)} = 11{,}23 = \operatorname{tg} \alpha$,

$\alpha = 85^\circ$.

7-8. $x_1 = +0{,}15 \quad x_2 = -1{,}15$.

7-9. $y' > 0$ para $x > 3$: función creciente

$y' < 0$ para $x < 3$: función decreciente.

7-10. $y' > 0$ para $-0{,}423 < x < -1{,}577$,

$y' < 0$ para $-1{,}577 < x < -0{,}423$.

7-11. Observar que y' se anula para $x = -1$.

7-12. El signo de la derivada es el de la variable.

7-13. $y' = (x + 1)(2x - 1)(10x^2 + 11x + 1)$

x	$-\infty$	-1		$-0{,}1$	0	$+0{,}5$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0		$+$	$+$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$10x^2 + 11x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'	$+$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

7-14. La función es siempre decreciente.

7-15. $y' > 0$ para $0 < x < 1/\sqrt{2}$
$y' < 0$ para $-1/\sqrt{2} < x < 0$.

7-16. $y' > 0$ para $-1/\sqrt{2} < x < +1/\sqrt{2}$.
Fuera de este intervalo, la función es decreciente.

7-17. La función crece cuando x es positiva.
La función decrece cuando x es negativa.

7-18. $y' < 0$ $\quad -5 < x < -1$.
Fuera de este intervalo, la función crece.

Determinación de puntos de inflexión

7-19. Un punto de inflexión ($x = +2$; $y = -58$).
La función decrece a ambos lados.

7-20. Dos puntos de inflexión:
1er punto ($x = +2$; $y = +82$): la función crece,
2.º punto ($x = -2$; $y = +82$): la función decrece.

7-21. Ningún punto de inflexión.

7-22. Tres puntos de inflexión:
$x_1 = +1{,}28$ la función crece,
$x_2 = +5{,}7$ la función decrece,
$x_3 = -3$ la función decrece — tangente vertical.

7-23. Punto de inflexión para $x = -1$
$y = 0$ y la pendiente de la tangente es $y' = -3$.

7-24. Ningún punto de inflexión.

7-25. $y'' = -648\,x^{-4}$ nunca será nula.

7-26. Ningún punto de inflexión.

7-27. Dos puntos de inflexión.

7-28. Ningún punto de inflexión.

7-29. y puede escribirse: $x^3 + x^2 - 2x$.
La abscisa del punto de inflexión en la función:
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ viene dada por $x = -b/3a$,
$x = -1/3$.

7-30. Tres puntos de inflexión:
$y' = 0$ para $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = +0{,}4$ $x_3 = +1$,
$y'' = 0$ para $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = +0{,}03$ $x_3 = +0{,}76$.
primer punto de inflexión $x_1 = -\frac{1}{2}$ la función crece
segundo punto de inflexión $x^2 = +0{,}003$ la función crece
tercer punto de inflexión $x^3 = +0{,}76$ la función decrece.

7-31. Un punto de inflexión:

$$x = \sqrt[3]{16} = 2{,}52.$$

7-32. $y'' = \dfrac{18}{(x+4)^3} \neq 0.$
Ningún punto de inflexión.

7-33. Tener en cuenta que la raíz de y'' es muy parecida a la de y'.

7-34. Dos puntos de inflexión por $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

7-35. Aplicar la regla dada en el ejercicio a resolver en **7-44.**

7-36. $y' = (x-1)^2(4x-1)$.
$y'' = 2(x-1)(6x-3)$.
Punto de inflexión para $y = \frac{1}{2}$.
Observar que para $x = 1$, y' cambia de signo.

7-37. Dos puntos de inflexión $x = 0$, $x = 2$.

Cuidado con el signo de y'.

7-38. Puntos de inflexión para:

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}.$$

7-39. Punto de inflexión para $x = 0{,}5$.

7-40. Punto de inflexión para $x = \pi/4$.

7-41. Dos puntos de inflexión para $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

7-42. Actuar por analogía con el ejercicio anterior.

7-43. Dos puntos de inflexión $x = 0$ y $x = 2\pi/3$.

Para $x = \pi$, y' cambia de signo.

7-44. $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$y' = 0 \quad \text{para } x = -\frac{b}{3a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$y'' = 6ax + 2b,$$

$$y'' = 0 \quad \text{para } x = -b/3a.$$

Observar que y' no se anula cambiando de signo más que para valores de x superiores o inferiores a $-b/3a$. Este punto de inflexión estará en el eje de las y si su abscisa es cero. Es preciso $b = 0$.

Determinación de máximos y mínimos

7-45. $x = +1$. Mínimo.

$x = -1$. Máximo.

7-46. $x = +1 \quad y'' < 0$. Máximo.

$x = -1 \quad y'' > 0$. Mínimo.

7-47. El mismo ejercicio que el **7-45.**

7-48. $x = 1{,}185$ mínimo.

7-49. $y' = \dfrac{3(1-2x^3)}{(x^3+1)^2}$ $y' = 0$ para $x = +0{,}8$

Si $x < +0{,}8$ $y' > 0$ e y crece.

Si $x > +0{,}8$ $y' < 0$ e y decrece.

Se tiene por consiguiente un máximo para $x = +0{,}8$.

7-50. $x = +2$. Mínimo.

$x = -2$. Máximo.

7-51. $x = +2{,}45$. Máximo.

$x = -2{,}45$ Mínimo.

7-52. Lo más sencillo es hacer el cuadro de variaciones del signo de y' en función de x. Se encontrará un máximo para $x < 0$ y un mínimo para $x > 0$.

7-53. Igual método que en el problema anterior:

$x = +0{,}548$. Mínimo.

$x = -1{,}215$. Máximo.

7-54. $x = \pi/2$. Máximo, $y'' = -3$.

$x = 3\pi/2$. Mínimo, $y'' = +3$.

7-55. $x = \pi/4$ $y'' = -\sqrt{2}\, e^{\pi/4} < 0$. Máximo.

7-56. $x = \pi/4$ $y'' < 0$. Máximo.

7-57. $x = -31^\circ 45'$. Mínimo.

7-58. $y' = 0$ para $x = \pi/8$,

$y'' = -e^{-x}(3\cos 2x + \operatorname{sen} 2x) < 0$ para $x = \pi/8$.

Se tiene por consiguiente un máximo.

7-59. $x = \pi/3$ $y'' = -3/2$. Máximo.

Precisemos que $y'' = 2\cos 2x - \cos x$.

7-60. $x_1 = +2$. Maximo.

$x_2 = +4$. Mínimo.

$x_3 = 0$. Mínimo.

7-61. $x = -2$. Mínimo, y'' siempre positivo.

7-62. $x = +2$. Máximo.

$x = +6$. Mínimo.

7-63. La función solamente está definida entre -4 y $+4$:

$x = -2{,}78$. Mínimo.

$x = +2{,}78$. Máximo.

Por ello estudiar la variación del signo de y'.

7-64. $x = -6$. Máximo.

$x = 0$. Punto de inflexión

$x = +6$. Mínimo.

7-65. $x = \pm 4$. Máximo.

$x = 0$. Mínimo.

Observar que y solamente está definido para $-4{,}9 < x < +4{,}9$.

7-66. Ningún máximo ni minimo.

La función y es siempre decreciente.

7-67. $y' = -\left[\frac{4}{e^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right] < 0.$

La función es siempre decreciente.

7-68. $x = -1{,}75$. Mínimo.

$x = +2$. Discontinuidad.

7-69. A condición de que $b > 0$:

$x = \pm 1/\sqrt{b}$: máximo

$x = 0$: mínimo.

7-70. El cálculo de y' da:

$$y' = -\frac{2}{(\operatorname{arc\,tg} 2x)^2(1+4x^2)}$$

y' es siempre < 0. Función decreciente.

CAPITULO VIII

PROBLEMAS PRACTICOS DE DETERMINACION DEL MAXIMO O MINIMO

8-1. $s = l - [2 \times 7L + 2 \cdot 10(l - 14)]$

$s = 279 - 14L - \dfrac{20}{L}$.

s representa la superficie a imprimir:

$s' = \dfrac{20}{L^2} - 14 = 0,$

$s'' = -\dfrac{40}{L^3} < 0.$ Se tiene por consiguiente un máximo:

$s' = 0$ para $L = 1{,}195$ m y $l = 0{,}837$ m.

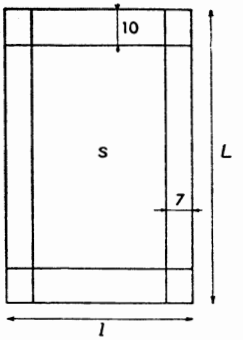


FIG. 8-1

8-2. $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 70°$, $\hat{C} = 40°$.

8-3. Precio total $= P = 40L^2 + 60L^2 + 4 \cdot 30 \left(L \cdot \dfrac{400}{L^2}\right)$,

$$P' = 100 \left(2L - \frac{480}{L^2}\right) = 0.$$

Soluciones: $L = 6{,}22$ m $h = 10{,}36$ m.

8-4. $AB = BC = l/\sqrt{2}$ con $AC = l$.

8-5. Superficie lateral $S_l = \pi ra$,

$$S_l' = 0 \quad \text{para } h = \frac{4R}{3}.$$

Ahora bien, $a^2 = x^2 + r^2 = 2Rx$

$x = h =$ altura del cono.

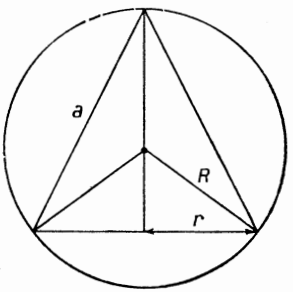


FIG. 8-5

8-6. $V = \frac{\pi}{3}(x^3 + Rx^2 - R^2x - R^3)$

(se refiere a la figura 8-5).

Solución: $h = 4R/3$ ya que la solución $h = 0$ es imposible.

8-7. Es preciso que la superficie lateral total sea mínima.

$S_l = L^2 + \frac{4.000}{L}$, con la altura $h = \frac{1.000}{L^2}$.

Respuestas: L = 12,6 m y $h = 6{,}29$ m.

8-8. Superficie lateral $= 2al = S =$ constante.

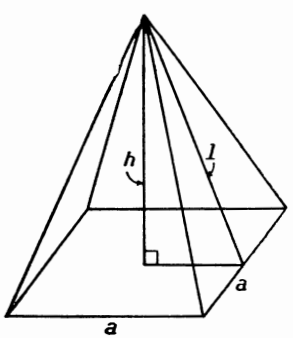


FIG. 8-8

$$V = \frac{S^2 h}{12 l^2}, \quad \text{con } l^2 = \frac{a^2}{4} + h^2,$$

$$V = \frac{S^2 h}{3a^2 + 12h^2} = f(h),$$

$$V' = 0 \quad \text{para } a/h = 2.$$

8-9. $a = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{S}{\sqrt{3}}} \qquad h = \sqrt{\frac{2S}{3}} \cdot 3^{-3/4}.$

Siendo entonces: $V_a'' = -6a/8$.

El volumen viene dado por la expresión

$$V = \frac{aS}{4\sqrt{3}} - \frac{a^3}{8} = f(a),$$

siendo a el lado de la base del prisma,
y S la superficie total del mismo.

8-10. Se precisa un supuesto: la velocidad del navío será constante y la cantidad de carbón se calculará para la velocidad más económica.

N número de toneladas de carbón por hora:

$$\frac{N}{v} = \frac{0{,}2}{v} + 10^{-3} v^2,$$

$$\left(\frac{N}{v}\right)_v' = -\frac{2 \cdot 10^{-1}}{v^2} + 2 \cdot 10^{-3} v,$$

$$\left(\frac{N}{v}\right)_v' = 0 \quad \text{para } v = 10^{2/3} = 4{,}64 \text{ km/h}.$$

Duración del recorrido de 1.000 km: 215,5 horas.

N = 64,65 toneladas.

8-11. r: radio de la base del cilindro.
R: radio de la base del cono de revolución.
h: altura del cilindro.
H: altura del cono.
V: Volumen del cilindro:

$$V = \frac{\pi H}{R} (r^2 R - r^3).$$

$V' = 0$ para $r = 2R/3$ entonces $h = H/3$,

$$V'' = \frac{\pi H}{R}(2R - 4R) = -2\pi H < 0.$$

8-12. Siendo a y b los lados del rectángulo:

$$a = 10 \text{ m} \quad b = 7{,}5 \text{ m}.$$

8-13. $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

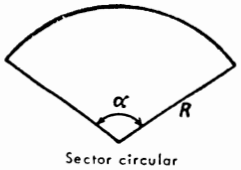


FIG. 8-13

Siendo P el perímetro:

$$P = 2R + \frac{40}{R} = f(R),$$

$P_R' = 0$ para $R = \pm 4{,}47$,

$P_R'' < 0$ únicamente para $R = +4{,}47$.

8-14. Observar que por placa de hierro circular, es preciso entender «sector circular».

$$r = R\sqrt{2/3}.$$

He aquí algunos elementos del cálculo:

$$h = R\sqrt{1 - B}, \quad \text{con } B = \alpha^2/4\pi^2,$$

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} B \cdot \sqrt{1 - B}$$

$V' = 0$ para $B = 2/3$.

de donde $\alpha = 2\pi\sqrt{2/3}$ y $r = \alpha R/2\pi$.

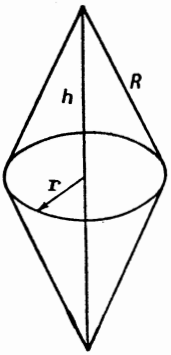


FIG. 8-14-1

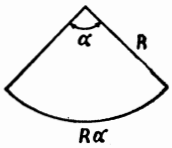


FIG. 8-14-2

8-15. Perímetro $P = 3L + 2h = 5$.

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + \frac{5L}{2} - \frac{3L^2}{2}.$$

$$S_L' = 0 \quad \text{para } L = \frac{5}{6 - \sqrt{3}}.$$

$L = 1{,}17$ m, $H = 1$ m, $h = 0{,}745$.

$S_L'' = -3 + \sqrt{3}/2 < 0$. Se tiene un máximo.

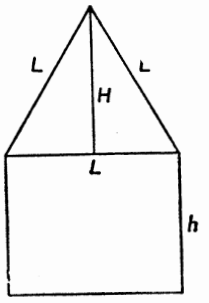


FIG. 8-15

8-16. 1.° Cilindro recto inscrito de volumen máximo

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2.° Cilindro recto inscrito de superficie total máxima

$$h_1 = 1{,}7 \quad h_2 = 1{,}05.$$

3.° Cono inscrito de volumen máximo

$$h = 4/3.$$

4.° Cono inscrito de volumen mínimo

$$h = 4.$$

8-17. Se precisa que sean iguales el diámetro del círculo y el lado del cuadrado.
Entonces $S'' = 2\pi$.

8-18. Los otros dos lados serán los de un triángulo isósceles, e iguales cada uno a 25 m.

8-19. La altura será perpendicular al punto medio del lado opuesto. El triángulo será isósceles. Sus dos lados iguales tendrán cada uno 78 cm.

8-20. 1.° Superficie máxima

$$AB = AC = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \cdot \hat{A}/2}.$$

2.° Perímetro máximo

$$\hat{B} = \hat{C} \quad \text{triángulo isósceles.}$$

8-21. 1.° Determinación del volumen máximo:

$$V = \pi h \frac{d^2}{4} + \frac{1}{3} \pi d \cdot \frac{d^2}{4},$$

$$V = \frac{\pi d}{4} \left(dh + \frac{d^2}{3} \right), \tag{1}$$

$$S_t = \pi dh + \frac{\pi d^2}{4} + \pi \frac{d}{2} a; \tag{2}$$

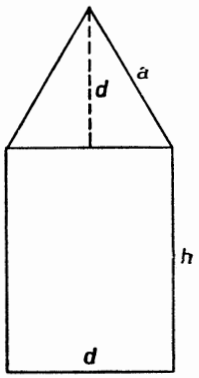


FIG. 8-21

despejada h de (2) y sustituida en (1):

$$V = S_t \cdot \frac{d}{4} + \frac{\pi d^3}{48} - \frac{\pi d^3}{16} \sqrt{5},$$

$$V' = 0 \quad \text{para} \quad d = 2 \sqrt{\frac{S_t}{5{,}7\pi}} \quad \text{y} \quad h = 0{,}3 \sqrt{S},$$

2.° Determinación de la superficie total mínima:

$$S_t = \pi dh + \frac{1}{4} (\pi d^2 + \pi d^2 \sqrt{5}),$$

$$S_t = \frac{4V}{d} + 1{,}5\, d^2$$

ya que $V = \frac{\pi d^2}{4}\left(h + \frac{d}{3}\right)$, de donde h puede despejarse.

$S'_t = 0$ para $d^3 = 4V/3$.

Es preciso pues $d = \left(\frac{4V}{3}\right)^{1/3}$

h puede calcularse entonces.

8-22. 1.° $\frac{h}{R} = \sqrt{2}$,

2.° $\frac{h}{R} = 2\sqrt{2}$.

8-23. Es preciso:

$$PM^2 + PN^2 = D = \text{mínimo},$$
$$D = 2x^2 - 2dx + a^2 + b^2 + d^2,$$
$$D' = 0 \quad \text{para} \quad x = d/2.$$

El punto P será el medio de AB.

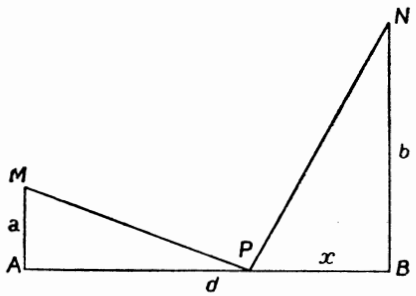


FIG. 8-23

8-24. El precio total P será:

$$P = \frac{4.000}{R} + 600\pi R^2,$$
$$P_R' = 0 \quad \text{para} \quad R^3 = 1{,}06,$$
$$R = 1{,}02 \text{ m}.$$

8-25. El número N se escribe:

$$N = x - x^2, \qquad N' = 1 - 2x,$$
$$N' = 0 \text{ para } x = \tfrac{1}{2},\ N'' = -2 < 0.$$

8-26. $x = +1$,
ya que $2/x^3 > 0$ únicamente para $x = +1$.

8-27. El momento del peso total es $pL^2/2$.
El equilibrio se obtiene para:

$$a \cdot m + pL^2/2 = F \cdot L,$$

$$F_L' = 0 \quad \text{para} \quad L = \sqrt{\frac{2am}{p}}$$

$$F_L'' = \frac{2am}{L^3} > 0.$$

Por ello se trata, efectivamente, de un mínimo.

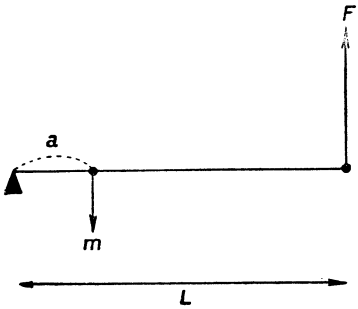


FIG. 8-27

8-28.

$$D = N_1O + N_2O,$$

$$D = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 136},$$

$$D_x' = 0 \quad \text{para} \quad 21x^2 + 48x - 144 + 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces Por ello, sólo la positiva es aceptable, $x = 1{,}755$ km.

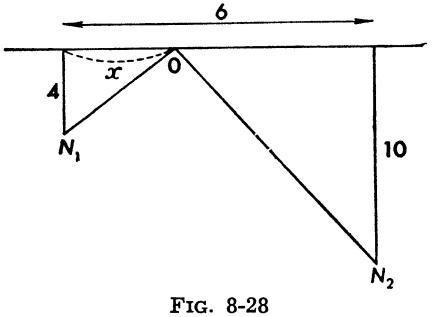


FIG. 8-28

CAPITULO IX

TRAZADO DE CURVAS

9-1. Los valores notables se resumen en el cuadro.

$$y' = -\frac{1}{2(x-1)^2} < 0.$$

la función es *siempre* decreciente.
Para $x = \pm\infty$, $y = +1$. Basta dividir por x numerador y denominador y a continuación hacer que tienda x a infinito.

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+1$		$+\infty$
y'	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
y	1	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\quad +\infty$	$\searrow$	1

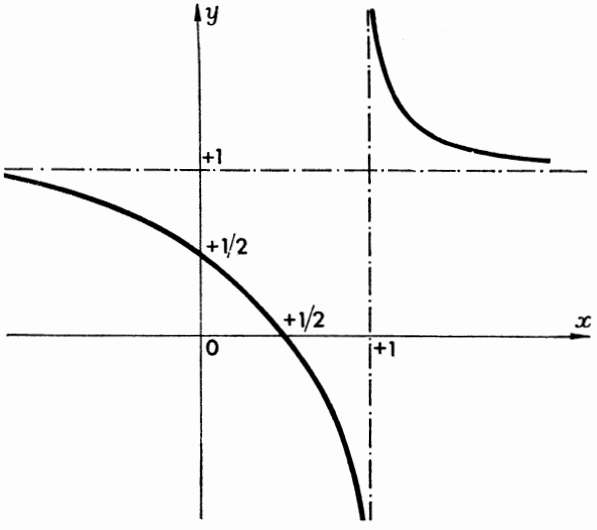


FIG. 9-1

9-2. Para $x = 0$ $\quad y = \frac{1}{2}$.

Para $x = \pm \infty$ $\quad y = 0$.

Por otra parte se tendrá siempre $y \neq 0$.

$y = \pm \infty$ para $x^2 - 2x + 2 = 0$..., lo que es imposible.

$$y' = \frac{2(1-x)}{K} \quad \text{con} \quad K = [1 + (1-x)^2]^2$$

$y'(0) = 2$: es la pendiente de la función y para abscisa cero

$y'(\infty) = 0$.

El cálculo de la segunda derivada da:

$$y'' = \frac{6x^2 - 12x + 4}{(x^2 - 2x + 2)^3} = 0 \quad \text{para} \quad x_1 \approx +1{,}57, \quad x_2 \approx +0{,}43.$$

Estas son las abscisas de dos puntos de inflexión.

x	$-\infty$		0		$0{,}43$		1		$1{,}57$		$+\infty$
y'	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$0{,}5$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0

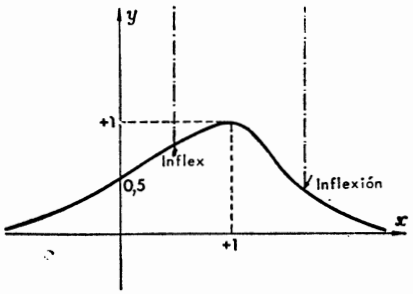


FIG. 9-2

9-3. La función y es discontinua para $x = \pm 1$.

No hay ningún punto de inflexión.

x	$-\infty$			-1	$-0{,}7$	0	$+0{,}7$	$+1$		$+\infty$
y'	0	$+$			$+$	0	$-$		$-$	0
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	1

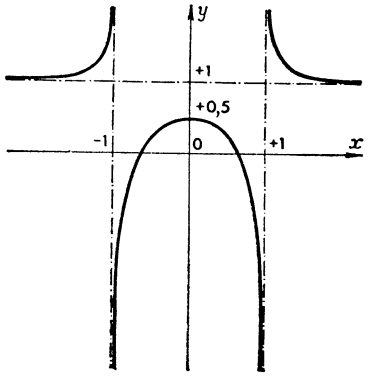


FIG. 9-3

9-4. La tendencia general de la función es la misma que la del ejercicio **9-3.**

x	$-\infty$		-1	$-0{,}617$	0	$+0{,}5$	$+1{,}61$	$+2$		$+\infty$
y'	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$ 0
y	$+1$ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	0	↗	$0{,}5$ ↗	$0{,}55$ ↘	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	$+1$

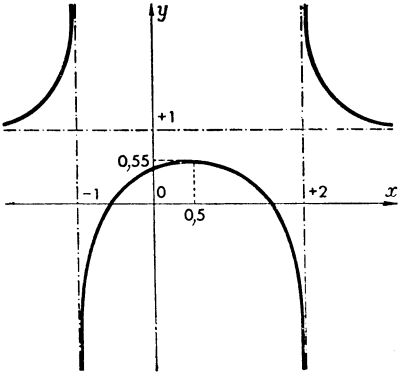


FIG. 9-4

9-5. La función y no es nunca infinita, ya que el trinomio no tiene raíces reales.

$$y' = \frac{2x(x-1)}{(2x^2-2x+1)^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = +1,$$

$$y'' = \frac{(4x-2)(2x^2-2x+1)(-2x^2+2x+1)}{K}$$

y'' se anulará para tres valores notables de x que serán $x_1 = -1{,}235$, $x_2 = +0{,}5$, $x_3 = +3{,}235$. Estas serán las abscisas de los tres puntos de inflexión.

x	$-\infty$		$-1{,}2$		0	$0{,}5$	$+1$		$+3$		$+\infty$
y'	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0
y''			0			0			0		
y	$0{,}5$	↗		$+1$	↘		0	↗	$0{,}3$	↗	$0{,}5$

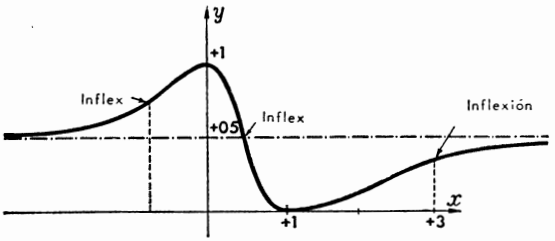


FIG. 9-5

9-6. Observar que la inflexión y es *siempre* decreciente en este caso, ya que:

$$y' = -\frac{2x^2+1}{K} \quad \text{y} \quad K > 0.$$

Hay también un punto de inflexión para $x \approx 0{,}3$.

x	$-\infty$		$-0{,}5$	$-0{,}3$	0	$0{,}3$	$+1$	$+1{,}36$		$+\infty$
y'	0	$-$ $-$	$-$			$-$		$-$	$-$	0
y''					0					
y	$+1$	↘	0	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘ 1	↘	0	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $+1$

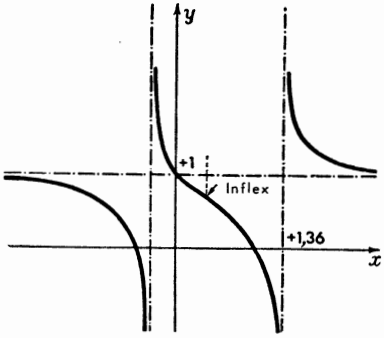


FIG. 9-6

9-7. Ejercicio libre.
Algunas observaciones: hay tres puntos de inflexión. El eje de las x es la asíntota horizontal.

9-8.

x	$-\infty$		-1		0	$0{,}2$		$1{,}1$		$1{,}5$		$+\infty$
y'	∞	$+$	0	$+$	0	0	$-$	0	$+$	∞		
y''			0		0			0				
y	$-\infty$	↗	0	↗	9	$11{,}7$ máx	↘	$5{,}9$	↘	0 mín	↗	$+\infty$

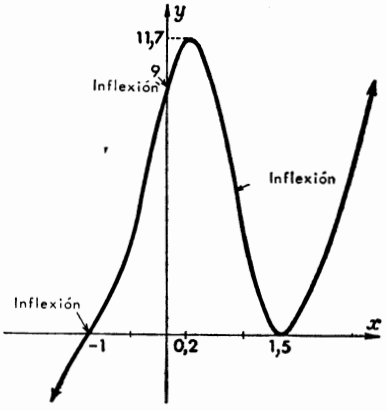


FIG. 9-8

Para $x = 0$, $\quad y = \pm 9$.
Observar que para $x = \pm \infty$, $y = \pm \infty$, ya que, en el infinito,

la potencia 3, impar, la lleva... o, si se quiere, en el infinito y se comporta como la potencia 5 de x.

$$y' = (x + 1)^2(2x - 3)(10x - 2).$$

Dos valores particulares de x anulan y'' sin anular y': son las abscisas de dos puntos de inflexión.

9-9. Ejercicio libre.

9-10. Para $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$.
Para $x = 0$, $y = -1$;
$y = 0$ para $x = +1$ y $x = +1/2$,
$y' = 6x^2 - 10x + 4$,
$y'' = 12x - 10 = 0$ para $x = 0{,}834$.

x	$-\infty$		0		0,5	0,66	0,83	1		$+\infty$
y'	∞	+		+		0	−	− 0	+	∞
y''							0			
y	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗ 0,37	↘	0	↗	$+\infty$

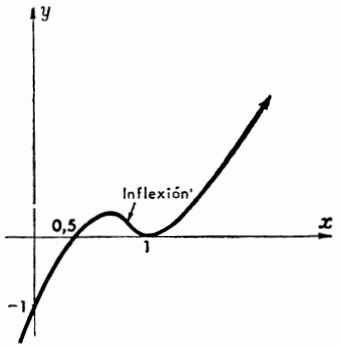


FIG. 9-10

9-11. Observar que el eje Oy es el eje de simetría, ya que y no cambia si se sustituye x por $-x$:

$$y' = -\frac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$|y'_{(\infty)}| = |2| = \operatorname{tg}\alpha.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$\|2\|$	$+$	0	$-$	$\|2\|$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

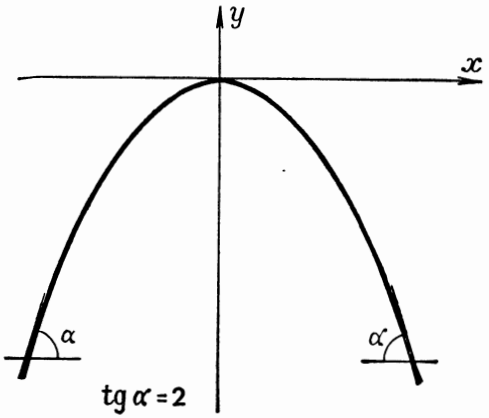


FIG. 9-11

9-12. Es preciso que $\operatorname{sen} x > 0$. Por consiguiente $0 < x < \pi$. Sustituyendo x por $(\pi - x)$, y queda igual. Por ello, la vertical que pasa por $\pi/2$ es el eje de simetría.

$$y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} = 0 \text{ para } x = \pi/2,$$

$$y'_0 = y'_\pi = \infty$$

para $x = \pi/4$, $\quad y'_{\pi/4} = 0{,}415$, $\quad \alpha = \approx 22°$.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
y'	∞		$+$		0		$-$		∞
y	0	$\nearrow$	$0{,}83$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0{,}83$	$\searrow$	0

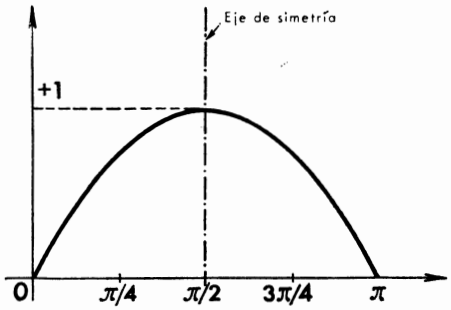


FIG. 9-12

9-13. Periodicidad: $x = 8\pi$ ya que, para este valor de x, $y = \cos 2\pi$. La tendencia general es la de $y = \cos x$.

9-14. Función siempre decreciente con una discontinuidad para $x = 0, \pi, \ldots k\pi$.
Puntos de inflexión para $x = (2n + 1)\pi/2$ con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ etcétera.

9-15. Resolver este ejercicio inspirándose en el indicado en la página ... del curso: ejemplo 16.

9-16. Para $x = \pm \infty$, $y = +\infty$.

Para $x = 0$, $y = -48$.

$$y'' = 12x^2 - 30x - 8.$$

Hay dos puntos de inflexión: $x_1 = +2{,}57$, $x^2 = 0$.

x		$-1{,}65$		2		$3{,}37$	
$x-2$		$-$		0		$+$	
$4x^2 - 7x + 22$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
Signo y'	$-$		$+$		$-$		$+$

x	$-\infty$		-3		$-1{,}6$		0		$+2$	$2{,}6$	$\approx$	$3{,}4$	$+$	4		$+\infty$
y'	∞	$-$			0	$+$			0	$-$		0			$+$	∞
y''							0			0						
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-100	$\nearrow$	-48	$\nearrow$	0	$\searrow$		$-7{,}5$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

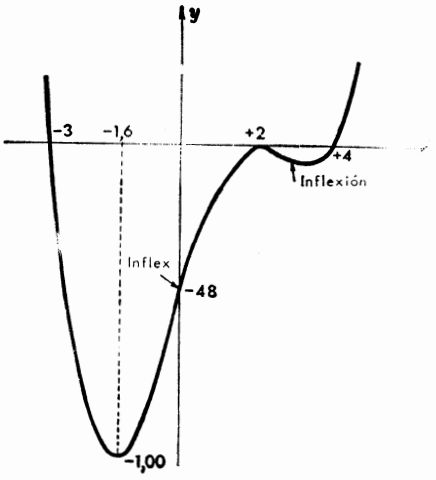


FIG. 9-16

9-17. y nunca es cero.

y es discontinua para $x = -1$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 25}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{para} \quad x \approx +4 \quad \text{y} \quad x \approx -6,$$

$y'_\infty = 1$: pendiente de la asíntota oblicua.

Ecuación de la asíntota: $y = ax + b$.

$$x + b = \frac{x^2 + 25}{x+1}, \quad \text{de donde} \quad b + 1 = \frac{25}{x}.$$

Pero $x \to \infty$ y $b = -1$.

La ecuación de la asíntota es, por consiguiente: $y = x - 1$.

x	$-\infty$		$+4$		-1		0		-6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-12{,}7$	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	$+25$	↘	$+8{,}2$	↗	$+\infty$

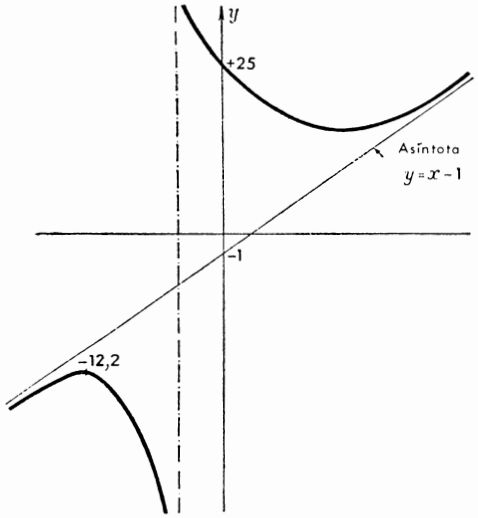


FIG. 9-17

9-18. No habrá allí punto de inflexión.

Para $x = 0$, $y = -0{,}8$,

Para $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$,

Para $x = 5$, $y = \infty$.

Por otra parte, la función y se anula para $x = 4$ y $x = +1$.

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-5)^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = +3 \quad \text{y} \quad x = +7.$$

En el infinito $y' = 1$.

Cáuculo de la asíntota. Es una recta de ecuación $y = ax + b$ con $a = 1$, ya que $y' = 1$.

Por consiguiente:

$$ax + b = x + b = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}.$$

$$\text{Si} \quad x = \infty, \quad b = 4.$$

Por consiguiente, la ecuación de la asíntota es $y = x + 4$.

Observar que la función corta a la asíntota para $x = 6$. En este punto $y = 10$.

Por otra parte:

$$y'' = \frac{8}{(x-5)^3} > 0 \quad \text{para} \quad x < 5.$$

x	$-\infty$		0	1	3	4	5	6	7	$+\infty$
y'	1	+			0	−			0	1
y	$-\infty$ ↗		$-0{,}8$ ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	$-\infty$ $+\infty$ ↘	9	↗	$+\infty$

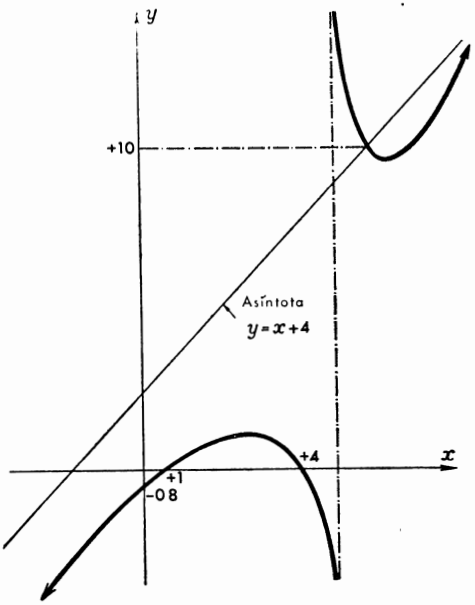


FIG. 9-18

9-20.

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0	$+1$	$+2$		$+4$	$+\infty$
y'	0	+	∞	+	0	−	∞	−		−	0	+	+	0
y	$+1$ ↗	$+\infty$	↗ $-\infty$		-9 ↘		$-\infty$ $+\infty$ ↘		$+1$ ↘	0 ↘	$-0{,}1$ ↗		0 ↗	$+1$

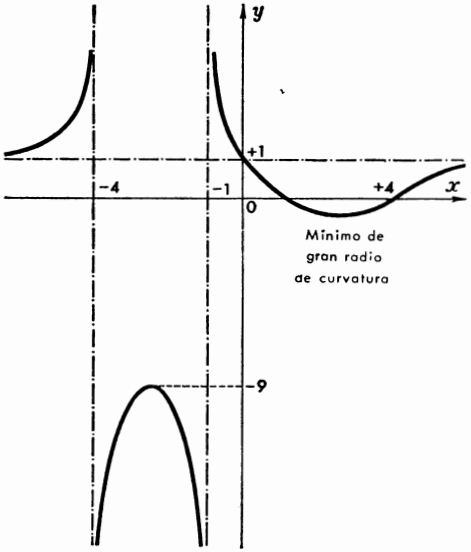


FIG. 9-20

9-21. y es una función creciente

$$y' = 254^2 + 110x + 291 > 0.$$

Los valores particulares se resumen en el cuadro. Hay también un punto de inflexión.

x	$-\infty$		$-1{,}75$		$-0{,}8$		0		$0{,}5$		$+1{,}6$		$+\infty$
y'	0	$+$	∞		$+$				∞				0
y	$1{,}9$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2{,}86$		$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1{,}9$

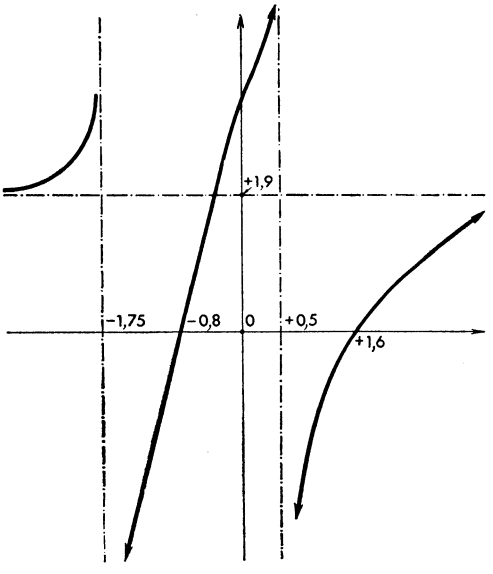


FIG. 9-21

9-22. y no está definida más que para $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.

El intervalo $-1 + 1$ es imposible por consiguiente.

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$$ es siempre positiva

x	$-\infty$		-1		0	$+1$		$+\infty$
y'	0	$+$	∞			∞	$+$	0
y	$+\infty$	↗	$+\infty$	//////		0	↗	$+1$

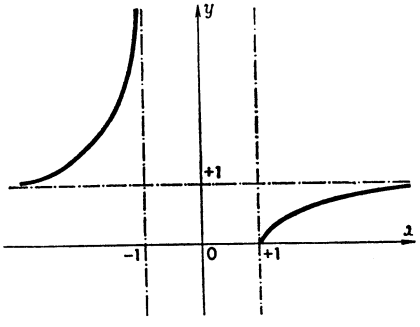


FIG. 9-22

9-23. Valores particulares:

$$x = 0 \qquad y = -1$$
$$y = 0 \qquad x = -1$$
$$y = \infty \qquad x = +1$$
$$x = \pm\infty \qquad y = 0$$

x	$-\infty$	-5	$-1{,}38$	-1	0	$+1$	$+\infty$
y'	0	$-\ 0$	$+$	0	$-$	∞	$-\ 0$
y''			0				
y	0	$-7/100$ ↗	↗	0	↘ -1 ↘ $-\infty$	$+\infty$	↘ 0

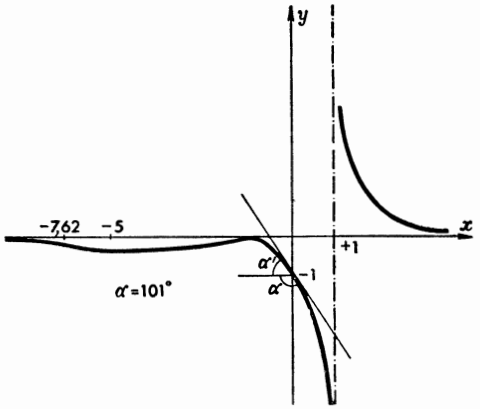


FIG. 9-23

$$y' = -\frac{(x+1)(x+5)}{(x-1)^4} = 0 \quad \text{para} \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x = -5,$$

$y'' = x^2 + 9x + 13 = 0$ para $x = -1{,}38$ y $x = -7{,}62$ que son las abscisas de dos puntos de inflexión.

Observar también $y'_{(0)} = -5 = \operatorname{tg}\alpha$,

Por consiguiente $\alpha' = 79°$ $\alpha = 101°$.

9-24. Para resolver este ejercicio se tendrán en cuenta los puntos siguientes:

Hay dos asíntotas verticales para $x = -1$ y $x = +2$. Para esta última hay que llegar hasta $+\infty$. Hay también dos puntos de inflexión.

9-25.

x	0		0,57		1,29		$+\infty$
y'	0		—		0	+	
y	2	↘	1	↘	0,43	↗	+1

Nota: Al cambiar $+x$ por $-x$, y conserva el mismo valor. La figura será simétrica con relación al eje Oy,

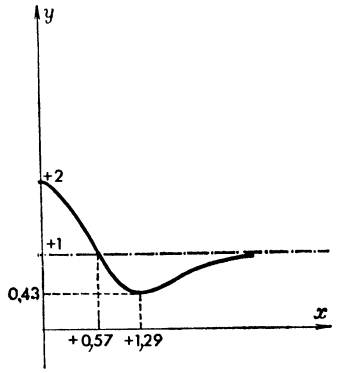


FIG. 9-25

9-26. La función está limitada entre $\pm a$.

$y'' = 0$ para $x = 0$ que es la abscisa de un punto de inflexión

$$\operatorname{tg}\alpha = a^3.$$

x	$-a$			$-a/\sqrt{2}$		0		$+a/\sqrt{2}$			$+a$
y'		∞	—	0	+		+	0	—	∞	
y		0	↘	$-\frac{a^3}{2}$	↗	0	↗	$+\frac{a^3}{2}$	↘	0	

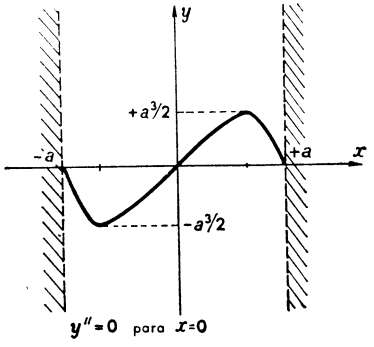


FIG. 9-26

9-27. $x^3 - 4x + 3$ solamente es positivo en el intervalo $3 < x < 1$.
$y' = 0$ para $x = 5/3, \ldots$ lo que es imposible para $x = \pm\infty$, $y \to \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+3$		$+\infty$
y'	0	$-$	∞	$-$	∞		∞		∞	$+$	0
y''				$\approx$	0						
y	-1 ↘		$-\infty$	$+\infty$ ↘	1,7 ↘	0	no definida	0	↗		$+1$

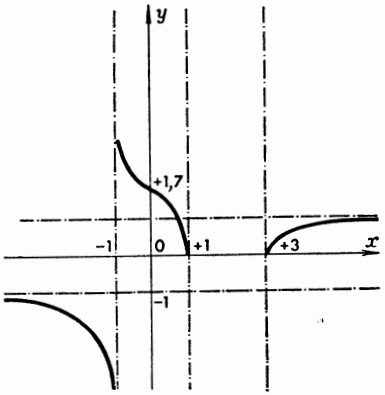


FIG. 9-27

9-28. y puede escribirse también:

$$y = 2\cos x - \frac{3}{2\cos x} \quad \text{ya que} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

Intervalo de periodicidad: si $x \to -x$, y es invariable, ya que Oy es el eje de simetría.

Si $x \to (\pi - x)$ $y \to -y$. Por consiguiente para $\pi/2$ hay un centro de simetría. Basta pues estudiar y entre 0 y $\pi/2$.

Para $x = 0$, $y = 1/2$.
Para $x = \pi/2$, $y = \infty$.
Para $x = \pi/4$, $y = -0{,}7$.
Para $x = \pi/6$, $y = 0$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}(4\cos^2 x + 3).$$

Esta derivada es negativa desde 0 a π y nula para $x = 0$.

x	$-\pi/2$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$		$5\pi/6$	π
y'		0	$-$		$-\infty$	$-$		0
y		1/2 ↘	0 ↘	$-0{,}7$ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-1/2$

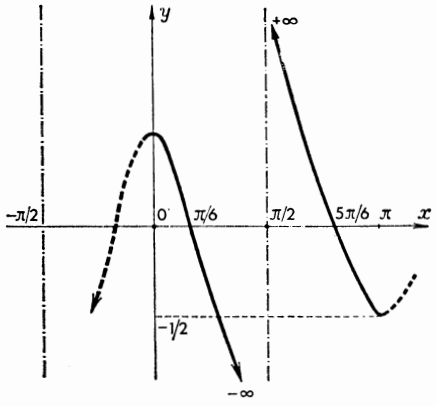


FIG. 9-28

9-29. Para trazar esta curva, se observará que la vertical trazada desde $x = +\pi/2$ es un eje de simetría

$$y' = \frac{\cos x(\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen} x)^2}.$$

9-30. Para $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ ya que x^3 es quien cuenta.
Para $x = 0$, $y = 0$.
Para $x = -1/2$, $y = \infty$.
$y' = (x + 1)(4x^2 - x + 1) = 0$ únicamente para $x = -1$,
$y'' = 6x(2x + 1) = 0$ para $x = 0$ y $x = -1/2$
Allí habrá, por consiguiente, un punto de inflexión para $x = 0$, ya que, para este valor y' no cambia de signo.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
y'	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$		$+$	∞
y	$+\infty$ ↘		$+2$ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗		0 ↗		$+\infty$

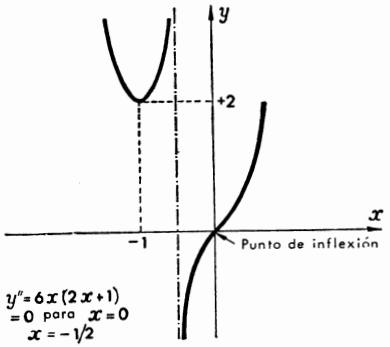


FIG. 9-30

9-31.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$0{,}75$		$+2$		$+\infty$
y'	0	$-$	0	$+$	1		$+$		$+$		0
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

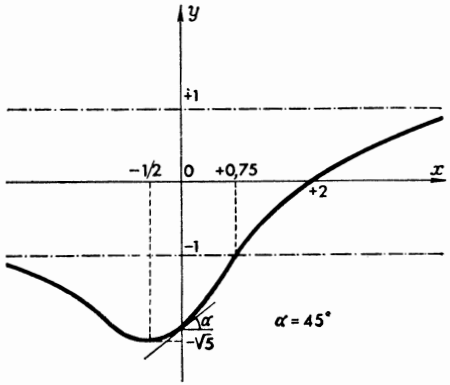


FIG. 9-31

9-32. Para $x = \pm\infty$, $y = +\infty$;

$y = 0$ para $\operatorname{arc\,tg} x = x^2$, sea $x \approx 0{,}5$,

$y = 0$ para $x = 0$,

$$y. = \frac{2x^3 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = +0{,}3.$$

Observar que arc tg $0{,}3 \approx 20^\circ = 0{,}348$ radianes.

x	$-\infty$		0		$0{,}365$	$0{,}5$	$+\infty$
y'	∞	$-$	-1	$-$	0	$+$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-0{,}215$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

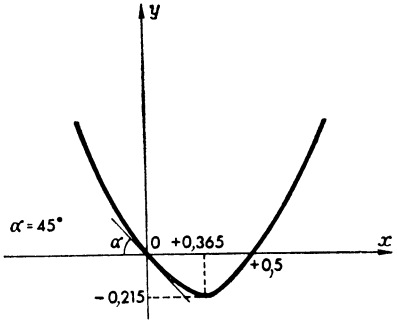


FIG. 9-32

9-33. x puede variar de $-\infty$ a $+\infty$.

Para $x = 0$, $y = 0$.

Para $x = \pi$, $y = 0$.

Para $x = 2\pi$, $y = 0$.

$$y' = e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \qquad \text{para} \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Las curvas $\pm e^{-x}$ son envolventes de la función y.

Los principales valores notables se resumen en el cuadro.

x	0		$\pi/4$	$\pi/2$	π	$5\pi/4$	2π
y'	1	$+$	0	$-$	$-e^{-\pi}$ $-$	0	$+$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\searrow$	mínimo $\nearrow$	0

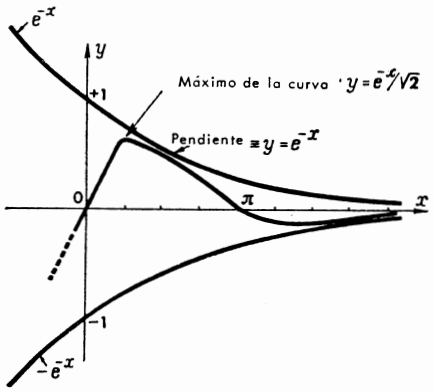


FIG. 9-33

9-34. La función y no estará definida en el intervalo $-3+3$. La función y es constantemente decreciente con dos discontinuidades simétricas.

9-35. Para $x=\infty$, $y \approx x\left(1+\frac{1}{x}\right) \approx x+1$: asíntota.

Para $x=0$, $y=0\cdot\infty$: forma indeterminada.
Si x tiende a 0 para valores >0 $\quad e^{1/x} \approx e^{\infty} \approx \infty$.
Si x tiende a 0 para valores <0 $\quad e^{1/x} \approx e^{-\infty} \approx 0$.

$y' = e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$ para $x=1$ y $x=0$ para los valores <0 de x.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	e	↗	$+\infty$

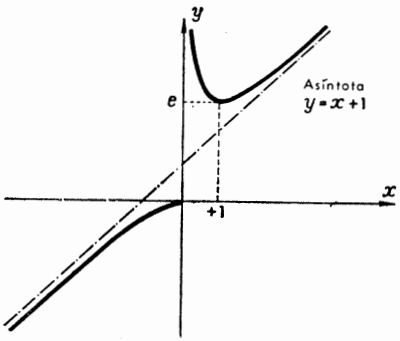


FIG. 9-35

9-37. Basta estudiar y desde 0 a π.

En efecto, si se sustituye x por $-x$, la función se convierte en:

$$-2 \operatorname{sen} x(1 - \cos x) = -y$$

ya que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$.

x	0		$\pi/2$		$2\pi/3$		π
y'	0	+			0	−	(-4)
y	0	↗	$+2$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

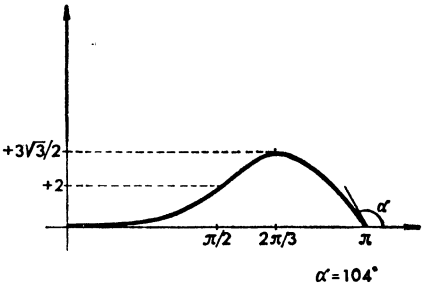


FIG. 9-37

9-38. Simplificando, y se convierte en: $y = 2 \cos x$.

La tendencia general es, por consiguiente, la misma que la de $y = \cos x$, pero, para los valores próximos a $y = 0$, la pendiente es mayor que en $y = \cos x$.

9-39. y es de la forma: $a \cos x + b \operatorname{sen} x$.

Utilizando la fórmula de transformación:

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}\right),$$

se obtiene:

$$y = \sqrt{13} \operatorname{sen}(x - \varphi)$$

con

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} \approx 56° 20'.$$

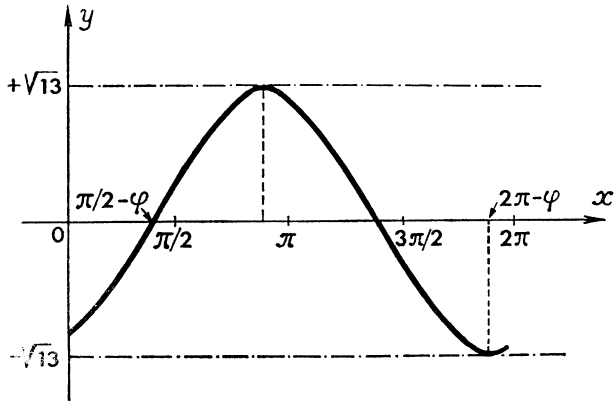
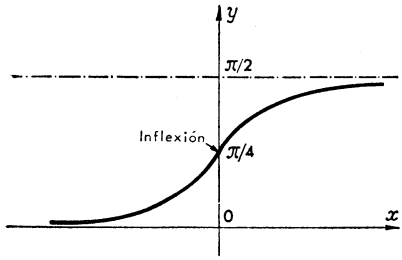


FIG. 9-39

9-40.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	$+$	$1/2$	$+$	0
y''			0		
y	0	↗	$\pi/4$	↗	$\pi/2$



$y''=0$ para $e^{2x}=1$ $x=0$

FIG. 9-40

9-41. y es siempre >0 ya que $1+\left(\dfrac{ax}{1+bx^2}\right)^2$ es >0.

$$y' = \frac{a^2x(1-bx^2)}{(1+bx^2)^3\sqrt{1+\left(\dfrac{ax}{1+bx^2}\right)^2}} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$x = \pm 1/\sqrt{b}$$

Es preciso suponer que $b>0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{b}}$		0		$+\frac{1}{\sqrt{b}}$		$+\infty$
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{1+\frac{a^2}{4b}}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{1+\frac{a^2}{4b}}$	$\searrow$	1

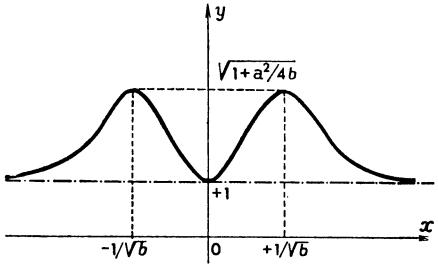


FIG. 9-41

9-42. ω puede variar de 0 a ∞.

Para $\omega = 0$, $y = C$.

Para $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $y = C - \dfrac{L}{R}$.

Para $\omega = +\infty$, $y = C$.

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$+\infty$
y'	$-LC = \operatorname{tg}\alpha$	$-$	0	$-$	0
y	C	$\searrow$	$C-\frac{L}{R}$	$\nearrow$	C

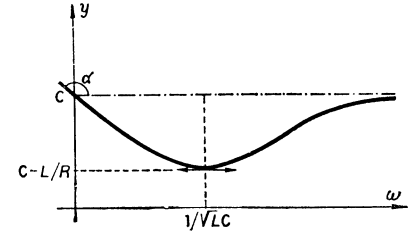


FIG. 9-42

$$y' = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L^2 + \frac{L}{C\omega^2}\right)}{\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{L^3\omega^4 - \frac{L}{C^2}}{\left[R^2\omega^2 + \left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

multiplicando por ω^3:

$$y' = 0 \quad \text{para} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$y'(0) = -LC = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$y'(\infty) = \frac{L^3\omega^4}{L^3\omega^6} \approx 0.$$

9-43.

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$+\infty$
y'	0	+	0	−	0
y	0	↗	$\frac{m^2}{LCR_2}$	↘	$\frac{m^2R_2}{L^2}$

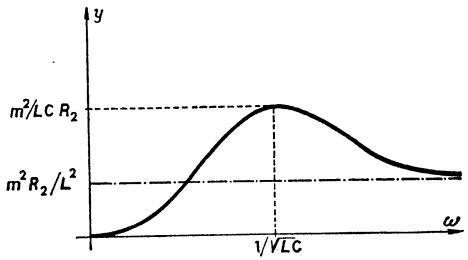


FIG. 9-43

9-44. $y = f(R)$, $R > 0$ varía desde 0 a $+\infty$.

$$y' = \frac{1}{(1 + R^2C^2\omega^2)^{3/2}} \text{ siempre } > 0.$$

$$y'(0) = 1 = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$y'(\infty) = 0;$$

para $R = \infty$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + C^2\omega^2}} \approx \dfrac{1}{C\omega}$.

R	0		$+\infty$
y'	$1 = \operatorname{tg}\alpha$	$+$	0
y	0	↗	$\dfrac{1}{C\omega}$

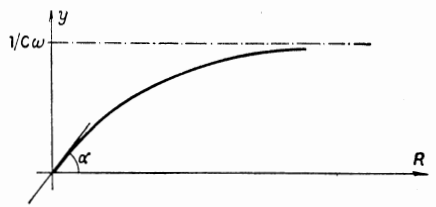


FIG. 9-44

9-45.

C	0		$\dfrac{1}{L\omega^2}$		$+\infty$
y'	0	$+$	$L\omega$	$+$	0
y	$-\pi/2$	↗	0	↗	Arc tg $L\omega$

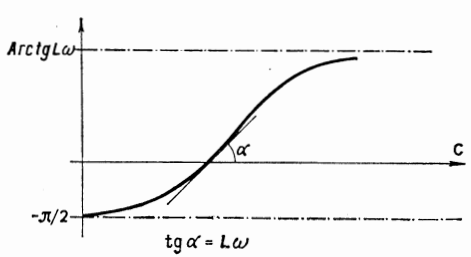


FIG. 9-45

9-46. Para $t = 0$, $y = 0$,

Para $t = +\infty$, $y = \mathrm{E}$.

$$y' = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{CR}} \cdot e^{-t/\mathrm{CR}} \text{ es siempre} > 0.$$

$$y'(0) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{CR}} \qquad y'^{t=\theta=\mathrm{CR}} = \frac{\mathrm{E}}{e \cdot \mathrm{CR}} = \operatorname{tg} \alpha'$$

para $t = \theta = \mathrm{CR}$, $y = \frac{2}{3}\mathrm{E}$.

t	0		CR		$+\infty$
y'	$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{CR}} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathrm{E}}{e\mathrm{CR}} = \operatorname{tg}\alpha'$		$+$		
y	0	$\nearrow$	2/3 E	$\nearrow$	E

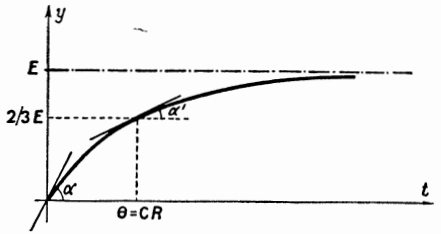


FIG. 9-46

9-47. $$\mathrm{H'_D} = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{D}} - \frac{\pi \mathrm{D H^2}}{2\mathrm{P}}\left(\frac{\pi \mathrm{D^2 H} - 2\mathrm{P} + 2\sqrt{\mathrm{P}(\pi \mathrm{D^2 H} - \mathrm{P})}}{\pi \mathrm{D^2 H} - 2\mathrm{P}}\right)$$

$$\mathrm{H'}_d = -\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{P}}}\sqrt{\pi \mathrm{D^2 H} - \mathrm{P}}.$$

Desarrollo de este último cálculo:

$$\mathrm{H'}_d = -\frac{2\mathrm{P}}{(\pi \mathrm{D})^2(\mathrm{D} - \sqrt{\mathrm{D}^2 - d^2})^2}\left[\frac{-\pi \mathrm{D}(-2d)}{2\sqrt{\mathrm{D}^2 - d^2}}\right]$$

$$= -\frac{2\mathrm{P}d}{\pi \mathrm{D}(\mathrm{D} - \sqrt{\mathrm{D}^2 - d^2})^2}.$$

Ahora bien:

$$D - \sqrt{D^2 - d^2} = \frac{2P}{\pi DH}.$$

Por consiguiente:

$$d = \frac{2}{\pi DH} \sqrt{P(\pi D^2 H - P)}$$

$$H'_d = -\frac{1}{2} \frac{\pi DH^2 \left(\frac{2\sqrt{P(\pi D^2 H - P)}}{\pi DH} \right)}{P} = -\frac{H}{P} \sqrt{P(\pi D^2 H - P)}.$$

Finalmente:

$$H'_d = -\frac{H}{\sqrt{P}} \sqrt{\pi D^2 H - P}.$$

CAPITULO X

OTRAS DERIVADAS

10-1. $x^2y^2 + y - 4 = 0,$

$2xy^2 + 2x^2y \cdot y'_x + y'_x = 0,$

$$y'_x = -\frac{2xy^2}{2x^2y + 1}.$$

10-2. $$y'_x = \frac{\cos x - y}{x}.$$

10-3. Es preciso desarrollar los paréntesis, derivar a continuación y aislar y' en un miembro.

$$y'_x = \frac{y^2 + x(3x + 8)}{2y(4 - x)}.$$

10-4. Ejercicio libre.

10-5. $$y'_x = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

10-6. $2x + 3y + 3x'y'_x + 10yy'_x = 0,$

$$y'_x = -\frac{2x + 3y}{3x + 10y}.$$

10-7. $$y'_x = -\frac{xy}{x^2 - 1} = \frac{xy}{1 - x^2}.$$

10-8. La ecuación dada podrá escribirse:

$$x^3 - xy^2 - 3xy + 1 = 0.$$

Apliquemos la fórmula del párrafo 84.

$$y'_x = -\frac{3x^2 - y^2 - 3y}{-2xy - 3x},$$

$$y'_x = \frac{3(x^2 - y) - y^2}{x(2y + 3)}.$$

10-9. $y'_x = -\dfrac{2x + y}{2y + x}.$

10-10. $y'_x = -\dfrac{(x + y)^{-1/3} + (x - y)^{-1/3}}{(x + y)^{-1/3} - (x - y)^{-1/3}} = -\dfrac{(x - y)^{1/3} + (x + y)^{1/3}}{(x - y)^{1/3} - (x + y)^{1/3}}$

10-11. Aplicando la misma fórmula y simplificando por 2, se tiene:

$$y_x' = \frac{\cos y \cdot \cos x}{\operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x} = \cot y \cdot \cot x.$$

10-12. El mismo procedimiento que en el número anterior.

10-13. $y'_x = -\dfrac{1/3x^{-2/3} + 1/2y^{1/2} \cdot x^{-1/2}}{1/2x^{1/2} \cdot y^{-1/2}}.$

10-14. Escribir: $(x^2 + y^2)^{1/2} - \ln (x^2 - y^2)^{1/2} = 0,$

$$y'_x = -\frac{x(x^2 + y^2)^{-1/2} - 2x(x^2 - y^2)^{-1/2}}{y(x^2 + y^2)^{-1/2} + 2y(x^2 - y^2)^{-1/2}}.$$

10-15. $y'_x = \dfrac{2x \operatorname{sen} y - y^2 \cos x}{x^2 \cos y - 2y \operatorname{sen} x}.$

10-17. $y'_x = -\dfrac{y + x \operatorname{arc\,tg} (y/x)}{x + y \operatorname{arc\,tg} (y/x)}.$

10-18. Observando que:

$$\ln xy = \frac{x^2}{y^2}$$

se tendrá:

$$y'_x = \frac{2x^2 - y^2}{\dfrac{2x^3}{y} + xy} = \frac{2x^2y - y^3}{2x^3 + xy^2} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{x(2x^2 + y^2)}.$$

10-19. $y'_x = -\dfrac{2}{3y^2(x-2)^2}$.

Segundas derivadas de funciones implícitas

10-20. $y'_x = -\dfrac{4x}{y} \qquad y''_x = -\dfrac{12}{y^3}$.

10-21. $y'_x = -\dfrac{4x^3}{4y^3} = -\dfrac{x^3}{y^3}$.

$y''_x = -\dfrac{3a^4x^2}{y^7}$.

10-22. $y'_x = -\sqrt{y/x} \qquad y''_x = \dfrac{\sqrt{a}}{2x^{3/2}}$.

10-23. $y'_x = \dfrac{3y}{2y-3x}$,

$y''_x = \dfrac{36}{(2y-3x)^3}$.

10-24. $y''_x = -\dfrac{6}{(2y+x)^3}$.

10-25. $y'_x = \dfrac{2mx}{3y^2-2my} \qquad y''_x = \dfrac{2m^2y(y^2-3x^2)}{(3y^2-2my)^3}$.

10-26. $xy^2 - x - y = 0$,

$y'_x = -\dfrac{y^2-1}{2xy-1} = \dfrac{1-y^2}{2xy-1}$

$y''_x = \dfrac{4x(y^2-1)}{(2xy-1)^3}$.

10-27. $y'_x = -(e^x \cdot e^{-y})$,

$y''_x = -\dfrac{4e^x}{(4-e^x)^2}$

10-28. $y'_x = \dfrac{y-x}{2y-x} \qquad y''_x = \dfrac{1-2xy}{(2y-x)^3}$.

Cálculo de y''_x:

$$y''_x = \frac{(y'-1)(2y-x)-(y-x)(2y'-1)}{(2y-x)^2} = \\ = \frac{2y^2-4xy+x^2}{(2y-x)^3} = \frac{1-2xy}{(2y-x)^3}.$$

Observar que: $2y^2 + x^2 = 1 + 2xy$.

10-29. $y'_x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} y}$, $\quad y''_x = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x - 2}{\operatorname{sen}^3 y}$.

10-30. $y'_x = \dfrac{1-\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)} \qquad y''_x = \dfrac{x}{\operatorname{sen}^3(x+y)}$

10-31. Observar que $e^{xy} = x$,

$$y'_x = -\frac{e^{xy}\cdot y - 1}{e^{xy}\cdot x} = \frac{1-xy}{x^2} \qquad y''_x = \frac{2xy-3}{x^3}$$

10-32. $y'_x = -\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 \qquad y''_x = -3x^2y^{-7}$.

10-33. $y'_x = (1-e^x)^{-1} \qquad y''_x = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$.

10-35. $f'_x = -\dfrac{\cos y \cdot e^{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x}{-\operatorname{sen} y} = 0.$

Por consiguiente $f''_x = 0$.

10-36. $y'_x = -\dfrac{y}{2x\cdot \ln x} \qquad y''_x = \pm\dfrac{y^3(3y^2+8)}{64x^2}$.

10-37. $y'_x = \dfrac{1-x-y}{e^x-1} \qquad y''_x = \dfrac{e^x(2y+x-2)}{(e^x-1)^2}$.

10-38. $y'_x = -\dfrac{y}{x} \qquad y''_x = 2x^{-3}$

Funciones paramétricas

10-39. $\begin{cases} x'_t = -2 \\ x'_t = 6t \end{cases}$ Por consiguiente $y'_x = -\dfrac{1}{3t}$.

10-40. $\begin{cases} y'_t = 2t \\ x'_t = -\dfrac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$ Por consiguiente $y'_x = -2t(1+t)^2$.

10-41. $y'_x = -\cos\theta$.

10-42. $\begin{cases} y'_t = -t(5-t^2)^{-1/2} \\ x'_t = -1(t+1)^{-2}. \end{cases}$

$$y'_x = t \cdot x^{-2} \cdot y^{-1} = \frac{t(t+1)^2}{\sqrt{5-t^2}}.$$

10-43. $y'_x = \cos^3 3\theta$.

10-45. Tener siempre presente para los 9 ejercicios siguientes la expresión:

$$y''_x = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

$$y'_t = t^2 \qquad x'_t = 2 \qquad\qquad y''_x = \frac{t}{2}.$$
$$y''_t = 2t \qquad x''_t = 0$$

10-46. $y''_x = \dfrac{12t^2 - 2(3t^2-2)}{8t^3} = \dfrac{3t^2+2}{4t^3}$.

10-47. $y''_x = \dfrac{2}{3} \cdot t^{-3}$.

10-48. $y''_x = y = t^{-1}$.

10-50. $y'_t = b\cos t, \qquad x'_t = -a \operatorname{sen} t,$

$y''_t = -b \operatorname{sen} t, \qquad x''_t = -a\cos t,$

$$y''_x = -\frac{b}{a^2 \operatorname{sen}^3 t}.$$

10-51. $y''_x = \dfrac{t \operatorname{sen} t(\cos t - t \operatorname{sen} t) - t\cos t(\operatorname{sen} t + t\cos t)}{t^3 \operatorname{sen}^3 t}$

$$y''_x = -\frac{1}{t \operatorname{sen}^3 t}.$$

10-52. $y''_x = 2e^{3\alpha t}$

10-53. $y''_x = -e^{-2t}(\operatorname{sen} t + \cos t)$.

Derivadas logarítmicas

10-54. $\ln y = \ln x^2 + \ln \sqrt{x^2+3}$,

$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$,

$\frac{y'_x}{y} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+3} \qquad y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+3}\right)$,

$y' = 2x\sqrt{x^2+3} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}}$.

10-55. $y'_x = x^{1/2}(6x+4)^{1/3} \cdot \frac{5x+2}{6x^2+4x}$.

10-57. $\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$,

$\frac{y'}{y} = \frac{x^4 - a^4 + 2a^2x^2}{x(x^4-a^4)}$

$y' = \frac{x^4 + 2a^2x^2 - a^4}{(x^2+a^2)^{3/2}\cdot(x^2-a^2)^{1/2}}$.

10-58. $\ln y = \sqrt{x}\ln x$,

$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)$.

10-59. $\ln y = (\ln x)^2$,

$y' = 2\ln x \cdot x^{(\ln x - 1)}$.

10-60. $y' = \left(\frac{2}{x}\right)^x (\ln 2 - \ln x - 1)$

ya que $\frac{y'}{y} = \ln 2 - \ln x - 1$.

10-62. $\ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$,

$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$,

$y' = x^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \ln x + x^{(\operatorname{sen} x - 1)} \cdot \operatorname{sen} x$.

10-63. $y' = \dfrac{4x^2}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+4)}}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+4}\right)$.

10-64. $y' = x^x(\ln x + x\ln x + 2 + x)$.

10-65. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{5}{x} + 2x\ln 3$.

$y' = x^5 \cdot 3^{x^2}\left(\dfrac{5}{x} + 2x\ln 3\right)$.

Habría podido escribirse también: $y = f(u, v)$.

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x$$

$$f'_u = 3^{x^2} \quad \text{y} \quad u'_x = 5x^4$$

$$f'_v = x^5 \quad \text{y} \quad v'_x = 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x.$$

Comprobar que se obtiene el mismo resultado.

10-66. $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln x + \ln(\ln x)$.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}-2}\cdot\ln x(1-\ln x).$$

10-67. $y' = [x^2(1-x^2)^{1/2}(1-x^3)^3]\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{9x^2}{1-3x^2}\right)$.

10-68. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2x(1+\ln x)} - \dfrac{4}{1+x}$ ... de donde el cálculo de y'

10-69. $y' = \dfrac{x^2}{(x+1)^2(1-x^2)^{1/2}}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{1-x^2}\right)$.

10-70. Escribir:

$$y = (1-x^2)^{1/3}\cdot(1+x^2)^{1/4}.$$

$$y' = -\frac{2}{3}x(1-x^2)^{-2/3}\cdot(1+x^2)^{1/4} + \frac{x}{2}(1-x^2)^{1/3}\cdot(1+x^2)^{-3/4}$$

10-71. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{5x}{1-5x^2} - \dfrac{3x^2}{x^3-1} + \dfrac{6x}{1-6x^2}$.

Los cuatro términos se multiplican cada uno por y.

10-72. Libre.

10-73. $y' = \dfrac{4}{x}(\ln x)^3 \cdot e^{1-4x}(1 - x \ln x)$.

Recordemos que $\ln e = 1$.

10-74. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\text{arc sen } x^2} \cdot \dfrac{(-2x)}{(1-x^2)^{1/2}} - \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\text{arc cos } x^2} (-2x)$

$\left[\dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\right]$,

$y' = \dfrac{x}{(1-x^2)^{1/2}} \left(\dfrac{\text{arc sen } x^2}{\text{arc cos } x^2}\right)^{1/2} \left(\dfrac{1}{\text{arc sen } x^2} + \dfrac{1}{\text{arc cos } x^2}\right)$.

10-75. $y' = 2e^{2x}(\text{sen } 4x + 2 \cos 4x)$.

Derivadas de funciones compuestas

10-76. $y = f(u, v), \qquad y'_x = f'_{(u)} \cdot u'_x + f'_{(v)} \cdot v'_x,$

$f'_{(u)} = \dfrac{1}{4x^2 - 5}, \qquad u'_x = 8x + 5,$

$f'_{(v)} = -\dfrac{4x^2 + 5x}{(4x^2 - 5)^2} \qquad v'_x = 8x,$

$y' = -5\dfrac{4x^2 + 8x + 5}{(4x^2 - 5)^2}$

10-77. $y' = \cos x \cdot x^{\cos x - 1} - \text{sen } x \cdot \ln x \cdot x^{\cos x}$.

10-78. $y' = x \cdot \cos x \cdot (\text{sen } x)^{x-1} + (\text{sen } x)^x \ln \text{sen } x$.

10-79. $f'_{(u)} = \dfrac{1}{x}(\text{tg } x)^{1/x-1},$

$u'_u = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f'_{(v)} = \ln \text{tg } x \cdot (\text{tg } x)^{1/x},$

$v'_x = -\dfrac{1}{x^2}$

$y'_x = \dfrac{(\text{tg } x)^{1/x-1}}{x \cdot \cos^2 x} - \dfrac{\ln \text{tg } x \, (\text{tg } x)^{1/4}}{x^2}$.

10-81. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln \cdot \ln x)$.

10-82. $y' = \operatorname{arc\,tg} x \cdot x^{(\operatorname{arc\,tg} x - 1)} + \dfrac{x^{(\operatorname{arc\,tg} x)} \cdot \ln x}{1 + x^2}$.

10-83. $f'_{(u)} = \operatorname{tg} x\,(\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{tg} x - 1}$,

$$u'_x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f'_{(v)} = (\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln (\operatorname{arc\,tg} x),$$

$$v'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

... de donde el cálculo de y'_x.

10-84. $y'_x = -2xy[1 + \ln (1 - x^2)]$.

10-85. $y'_x = -4x^2(1 - 4x^2)^{x/2-1} + (1 - 4x^2)^{x/2} \cdot \ln (1 - 4x^2)^{1/2}$.

Observar que:

$$f'_{(v)} = (1 - 4x^2)^{x/2} \cdot \ln (1 - 4x^2)$$

ya que y es de la forma $y = u^v$ con $v = x/2$.

10-86. $y = f(u, v)$,

$$y' = \frac{2x(18x^2 - 5)}{\sqrt{4x^2 - 1}}.$$

10-87. $y' = 2e^{2x}(\operatorname{sen} 4x + 2 \cos 4x)$.

10-88. Libre.

10-89. $y = \dfrac{u}{v}$ $\qquad f'_{(u)} = \dfrac{1}{\ln x}$

$$u'_x = \frac{1}{x}$$

$$f'_{(v)} = -\frac{\ln 2x}{(\ln x)^2}$$

$$v_x' = 1/x$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln x} - \frac{\ln 2x}{x \cdot (\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \ln x}(1 - y).$$

TOMO II

DESARROLLOS EN SERIES
CALCULO DE IMAGINARIAS
CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO I

DESARROLLO EN SERIE

1-1. $f'_{(x)} = 4\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ $\qquad f(0) = 1$, $f'(0) = 4$

$f''_{(x)} = 4(1-x)^{-3}\left[1 + 3\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]$ $\qquad f''(0) = 16$, $f'''(0) = 72.$

etc.

$$y = 1 + 4x + \frac{16x^2}{2!} + \frac{72x^3}{3!} + \ldots$$

$$y = 1 + 4x + 8x^2 + 12x^3 + \ldots 4nx^n.$$

1-2. Se obtendrá sucesivamente:

$$f(0) = 1,$$
$$f'(0) = 0,$$
$$f''(0) = -3,$$
$$f'''(0) = 0,$$
$$f^{(4)}(0) = 21,$$
$$y = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} - \ldots$$

1-3. $y = -(1+x)^{-1/2} - \left(\dfrac{1-x}{2}\right)(1+x)^{-3/2},$

$$y'' = (1+x)^{3/2} + \frac{3}{4}(1-x)(1+x)^{-5/2}$$

$$y''' = -\frac{9}{4}(1+x)^{-5/2} - \frac{15}{8}(1-x)(1+x)^{-7/2}.$$

De donde:

$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = -3/2,$$
$$y''(0) = 7/4,$$
$$y'''(0) = -33/8,$$
$$y = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} - \frac{33x^3}{48} + \ldots$$

1-4. $y = 4 - 10x^2 + \frac{41}{6}x^4 - \ldots$

Recordar que el desarrollo de un cociente es igual al cociente de los desarrollos.

1-6. $f'(x) = -\frac{a}{a^2 + x^2}$ $\quad f'(0) = -\frac{1}{a},$

$$f''(x) = \frac{2ax}{(a^2 + x^2)^2} \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{2a^3 - 6ax^2}{(a^2 + x^2)^3} \quad f'''(0) = \frac{2}{a^3}.$$

De otra parte:

$$(0) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots$$

1-7. $y = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \ldots$

1-8. La función y puede escribirse:

$$y = \tfrac{1}{2}[\log(1 + x) - \log(1 - x)].$$

Ahora bien

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Por consiguiente y se escribirá:

$$y = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots\right)$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Por el método clásico se obtiene:

$$f(0) = 0,$$
$$f'(0) = 1,$$
$$f''(0) = 0,$$
$$f'''(0) = 2,$$
$$f''''(0) = 0,$$
$$f^{(5)}(0) = 24,$$
$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

1-9. $y = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{3 \cdot 27} - \frac{10x^4}{3^2 \cdot 27} + \ldots$

1-10. Lo más sencillo es hacer la división de 1 por el desarrollo de $\cos x$, lo que da:

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + \ldots$$

1-11. Ya que $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$

$$y = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360}.$$

1-12. Los cálculos de las tres primeras derivadas resultan:

$$f(0) = 1,$$
$$f'(0) = 3,$$
$$f''(0) = 18,$$
$$f'''(0) = 114.$$

Por consiguiente:

$$y = 1 + 3x + 9x^2 + 19x^3 + \ldots$$

1-13. Es preciso hacer el producto de los dos desarrollos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

por

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$$

lo que da

$$y = 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \ldots$$

1-14. Hacer también el producto de los dos desarrollos.

1-15. $y = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \ldots$

1-16. $f'(x) = \frac{e^x}{2}(1 + e^x)^{-1/2}$

$$f''(x) = \frac{e^x}{2}\left[(1 + e^x)^{-1/2} - \frac{e^x}{2}(1 + e^x)\right]^{-3/2} \qquad \begin{cases} f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ f''(0) = \dfrac{3}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$y = \sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} + 3\frac{x^2}{16\sqrt{2}}.$$

1-17. y puede escribirse:

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2\right)^{-1/2}$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2\right)^2 - \ldots$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{bx}{2a\sqrt{a}} + \frac{x^2}{2a\sqrt{a}}\left(-c + \frac{3b^2}{4a}\right) - \ldots$$

1-18. Ya que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \ldots$ y $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \varepsilon x^3 \quad \text{con } \varepsilon \to 0 \text{ con } x.$$

1-20. $y = 1 - \dfrac{nx^2}{2!} + \dfrac{3n^2 - 2n}{4!} \cdot x^4 - \ldots$

1-21. Es preciso dividir x por el desarrollo de $e^x - 1$.

$$y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \ldots$$

1-22. $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{2}{\cos 2x}$ $\qquad y'(0) = 2$

$$y'' = \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \qquad y''(0) = 0$$

$$y''' = \frac{4}{\cos^4 2x}(2\cos^3 2x + 4 \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x) \qquad y'''(0) = 8$$

$$y = 2x + \frac{4x^3}{3} + \ldots + \varepsilon x^3$$

1-23. $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} +$$

Cálculos por la serie de Taylor

1-24. $12^\circ = 10^\circ + 2^\circ$

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) +$$

$f(a) = \operatorname{sen} 10^\circ = 0{,}173\,6$

$f'(a) = \cos 10^\circ = 0{,}984\,8$

$h = 2^\circ = \pi/90 = 0{,}034\,9.$

Respuesta: $0{,}173\,6 + 0{,}034\,9 \cdot 0{,}984\,8 = 0{,}207\,9.$

1-25. Aquí, utilizar el desarrollo de $f(a - h)$; $a = 30^\circ$; $h = 1^\circ$.

Respuesta: 0,874 7.

1-26. $\log 1{,}25 = \log (1 + 0{,}25)$

Respuesta: $\log 1{,}25 = 0{,}218\,8$

1-27. $y = x^{1/4}$, $x = 16 + 0{,}2$. Ahora bien $16^{1/4} = 2$.

Aquí $h = 0{,}2$.

Respuesta: 2,006 2.

1-29. $\operatorname{sen} 1^\circ = 0{,}017\,45$

$\cos 1^\circ = 0{,}999\,85$

$h = 0{,}5 = \pi/360 = 0{,}00\,872$

Respuesta: 0,026 16.

1-30. $f(x) = x^{1/6}$, $f(a) = 2$,

$f'(x) = \dfrac{1}{6} x^{-5/6}$ $f'(a) = \dfrac{1}{192}$.

Respuesta: $2 + \dfrac{6}{192} = 2{,}031$.

1-31. $h = 0{,}1$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f'(a) = -10^{-4}$.

Respuesta: 0,009 99.

1-32. Respuesta: 0,600 56.

1-33. Respuesta: $3 + \dfrac{0{,}1}{6} = 3{,}016\,6$

1-35. $h = 0{,}3$, $f'(a) = 0{,}2$.

Respuesta: 1,06.

1-36. $f(x) = f(a) + \dfrac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$.

Aquí $a = 2$

$f(x) = \operatorname{tg} x$ $f(a) = \operatorname{tg} 2$

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $f'(a) = 1 + \operatorname{tg}^2 2$

$f''(x) = 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ $f''(a) = 2 \operatorname{tg} 2(1 + \operatorname{tg}^2 2)$

$f(x) = \operatorname{tg} 2 + (x-2)(1 + \operatorname{tg}^2 2) + \operatorname{tg} 2\,(x - 2^2)(1 + \operatorname{tg}^2 2) + \ldots$

1-37. $f(x) = \log 2 + \dfrac{(x-1)}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{(x-1)^3}{24} - \dfrac{(x-1)^4}{64}$.

1-38. Aquí $a = -1$

$$f(a) = -3$$
$$f'(a) = +3$$
$$f''(a) = -8$$
$$f'''(a) = 48$$
$$f^{(4)}(a) = -120$$
$$f^{(5)}(a) = +120$$
$$f^{(6)}(a) = 0$$

$$f(x) = -3 + (x+1)3 - (x+1)^2 4 + (x+1)^3 8 - (x+1)^4 5 + (x+1)^5.$$

1-40. $f(x) = 0{,}5 + \dfrac{1}{4}(1+x) + \dfrac{1}{8}(1+x)^2 + \dfrac{1}{16}(1+x)^3 + \ldots$

1-41. Aquí $a = 3$, $f(a) = 4$.

$$f'(x) = -3(x-2)^{-2} \qquad f'(a) = -3$$
$$f''(x) = 6(x-2)^{-3} \qquad f''(a) = 6$$
$$f'''(x) = -18(x-2)^{-4} \qquad f'''(a) = -18$$
$$f^{(4)}(x) = 72(x-2)^{-5} \qquad f^{(4)}(a) = 72$$

$$f(x) = 4 - 3(x-3) + 3(x-3)^2 - 3(x-3)^3 + 3(x-3)^4 - \ldots$$

CAPITULO II

EXPRESIONES INDETERMINADAS

2-1. $y = \dfrac{0-0}{0} = \dfrac{0}{0}$ forma indeterminada.

Primer método: hallar el cociente de los dos desarrollos

$$y = \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Segundo método: aplicar la regla de Lhôpital:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0} \qquad \frac{N''}{D''} = \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{N'''}{D'''} = \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \qquad \text{cuando } x = 0, \qquad \text{ya que } \cos 0 = 1.$$

2-2. Esta no es una forma indeterminada

$$y = \frac{e^0 - 0}{0-0} = \frac{1-0}{0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

2-3. $\dfrac{N'}{D'} = -\operatorname{tg} x = 0 \qquad$ para $\qquad x = 0 = \ln y$

ya que $y = 1^\infty \qquad$ para $\qquad x = 0.$

Por consiguiente $y = 1$ (ya que $\ln y = 0$).

En efecto $\ln y = \dfrac{1}{x} \ln \cos x = \dfrac{N}{D}.$

2-4. $y = 1$ pues el logaritmo de un número x varía más despacio que el número.

2-5. No olvidar que $\ln (1 + x) \to x$ cuando $x \to 0$.

Respuesta: $y = e^{1/3}$.

2-6 Aplicar la regla de Lhôpital:

$$y = \frac{32}{27} = 1{,}185.$$

2-7. $$\frac{N'}{D'} = \frac{2/3(1+x)^{-2/3} - 1/2(4+x)^{-1/2}}{1/2(9+x)^{-1/2}};$$

para $x = 0$:

$$\frac{N'_{(0)}}{D'_{(0)}} = \frac{2/3 - 1/2(4)^{-1/2}}{12(9)^{-1/2}} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

2-8. Calcular hasta N'''/D'''

$$y = 2.$$

2-10. $$y = \frac{x - x^3/6 - x(1 - x^2/2)}{x[1 - (1 - x^2/2)]} = \frac{2}{3}.$$

2-11. $y = -4/9.$

2-12. $$y = \frac{ax + a^3x^3/3 - ax}{x^2(ax)} = \frac{a^2}{3}$$

2-13. $\operatorname{sen} 5x = 5x - 125x^3/6$

$\operatorname{sen} 3x = 3x - 27x^3/6$

$\operatorname{tg} 3x = 3x + 27x^3/3$

$\operatorname{tg} 2x = 2x + 3x^3/3.$

$$y = \frac{2x - 179x^5/6}{x - 43x^3/6} = \frac{2 - 179x^2/6}{1 - 43x^2/6} = 2.$$

... los términos de segundo orden son nulos.

2-14. $$y = \frac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d}.$$

recordándose que se tiene

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2.$$

2-15. Se sabe que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}.$$

y puede pues escribirse:

$$y = \frac{x^2 + 2\dfrac{x^3}{6}}{x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{6}} = \frac{x + \dfrac{x^2}{3}}{1 - \dfrac{x^2}{3}} = 0 \quad \text{cuando } x = 0.$$

2-16. $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$.

2-17. Se utilizan los desarrollos de e^x y de $\operatorname{sen} x$.

$$y = \frac{x^3/6}{x^3/6} = 1 \qquad \text{cuando } x = 0$$

2-18. Forma indeterminada 1^∞ pues $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$.

Puede escribirse:

$$\ln y = \frac{3}{x^2} \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \frac{N}{D}.$$

$$\frac{N'}{D'} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x^2}\right); \text{ para } x = 0, \frac{N'}{D'} \to -\infty.$$

Por consiguiente $y = 0$ para $x = 0$.

2-19. $y = e^a$.

2-21. $\ln y = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{a^x + b^x}{2} = \dfrac{N}{D}.$

$$\frac{N'}{D'} = 2 \cdot \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} \qquad \text{si } x = 0, \quad \frac{N'}{D'} = \ln (a \cdot b).$$

Por consiguiente $\ln y = \ln (a \cdot b)$,

$$y = a \cdot b,$$

2-22. $y = \dfrac{1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6}}{p + \dfrac{p^2x}{2} - \dfrac{p^3x^2}{6}} = \dfrac{1}{p}$ para $x = 0$.

2-23. $y = \frac{1}{2}$.

2-24. Forma $\dfrac{0}{0}$, $y = \dfrac{N}{D}$.

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\dfrac{a^2}{2\sqrt{ax}} - 2x}{-\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}} = \frac{a^2 - 4x\sqrt{ax}}{-a}.$$

Para $x = a$, $y = 3a$.

2-25. $y = \ln a - 1$.

2-26. No puede utilizarse el desarrollo de $\cos x$, pues x no tiende a 0.

$$\frac{N'}{D'} = \frac{a \operatorname{sen} ax}{2x} \quad \text{y para} \quad x = n$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen} an}{2n}.$$

2-27. Si $n = 1$, $y = \dfrac{me^{m\alpha}}{n}$.

Si $n > 1$, $y = \infty$.

2-28. $y = 1$. Aplicar la regla de Lhôpital después de haber pasado a logaritmos.

2-29. $y = \dfrac{1}{e}$.

Para resolver esta indeterminación, es preciso poner:

$$x = \frac{\pi}{4} + u \quad \text{con} \quad u \to 0. \quad \text{Entonces} \quad \operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2u}$$

$$\ln y - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} u}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2u} [\ln (1 + \operatorname{tg} u) - \ln (1 - \operatorname{tg} u)],$$

$$\ln y = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2u}(2 \operatorname{tg} u + \varepsilon \to 0) = -\frac{2 \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} 2u} \to -1.$$

Por consiguiente $\ln y \to -1$ cuando $u \to 0$, es decir $x = \pi/4$.

2-30. $y = \frac{1}{2}$. Regla de Lhôpital.

2-31. Forma indeterminada $\infty \cdot 0$.

Poner:

$$\frac{30}{a} = \frac{\pi}{6a} = u \to 0.$$

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{6} = \frac{\pi}{6a} - \frac{\pi^3}{6(6a)^3} + \dots$$

$$y = \frac{a\pi}{6a} = \frac{\pi}{6}.$$

En efecto, si $a = \infty$, $\frac{\pi^3}{6(6a)^3}$ es despreciable.

2-33. $y = 0$.

2-34. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Calcular N′/D′ después de N″/D″.

$$\frac{N''}{D''} = -\frac{\operatorname{sen} x/2}{(x-\pi)4 \cos x/2 + 8 \operatorname{sen} x/2}.$$

Si $x = \pi$, $\quad N''/D'' = -1/8 = y$.

2-35. $y = e^a$.

2-36. $(e^{-x})^a (\ln b + \ln x)$ tiene el mismo límite que $e^{-ax} \ln x$.

$e^{-ax} \ln x = e^{-ax} \ln ax - e^{-ax} \ln a$ tiene el mismo límite que $e^{-ax} \ln ax$;

siendo $a > 0$, ponemos $ax = u$.

$e^{-u} \ln u \to 0$ cuando $u \to \infty$, ya que la potencia le eleva sobre el logaritmo.

Por consiguiente $y = 0$.

2-37. La forma indeterminada es ∞^0.

$$\ln y = \ln x \cdot \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\ln \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{\ln x}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{N}{D}.$$

Por ello es preciso aplicar la regla de Lhôpital

$$N''/D'' = 0 = \ln y.$$

Por consiguiente para $x = 1$, $y = 1$.

2-38. $y = e$.

2-39. El denominador de y debe leerse: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

$N''/D'' = -\operatorname{sen} x$. Por consiguiente para $x = \pi$, $y = 0$.

2-40. $\ln y = \dfrac{\ln x}{\ln 3 + \ln x} \to 1$, $y = e$.

2-42. $y = e^a$.

2-43. $\dfrac{N'}{D'} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $\dfrac{N''}{D''} = \dfrac{e^x}{e^x} = 1 = y$.

2-44. La exponencial crece más deprisa que cualquier potencia m de x.

2-45. El número crece más deprisa que su logaritmo $y = \infty$.

2-46. $y = 2a/3$.

2-47. Se insiste en lo mismo que en el núm. **2-45**, $y = 0$.

2-48. Comparar con el núm. **2-44.**

2-49. y puede escribirse:

$$y = \frac{e^{x \cdot \ln 4}}{x^4}.$$

Ahora bien $\dfrac{e^x}{x^4} \to \infty$, con x, y $e^{x \cdot \ln 4} > e^x$.

Por consiguiente $y = \infty$.

2-50. $y = 1$.

2-51. $$y = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{N}{D},$$

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\cos\dfrac{\pi}{x}\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \pi\cos\frac{\pi}{x},$$

para $x = \infty$, $\dfrac{\pi}{x} = 0$; $\cos 0 = 1$, $y = \pi$.

2-52. $y = \pi$.

Es preciso poner $2^x = u$ que tiende a infinito.

2-54. y es de la forma 1^∞.

$$\ln y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \frac{\ln(2-x)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\pi x/2}} = \frac{N}{D}$$

$$\frac{N'}{D'} = \frac{2\operatorname{sen}^2\pi x/2}{(2-x)\pi} \quad \text{si } x = 1, \quad \frac{N'}{D'} = \frac{2}{\pi},$$

$y = e^{2/\pi}$.

2-55. $y = -\frac{1}{2}$.

2-56. $y = e^{-1}$.

2-57. Es preciso poner $x = 1 + u$:

$$y = \frac{1}{\ln(1+u)}\cos\frac{\pi}{2}(1+u),$$

$$y = -\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}u}{u}, \quad \text{ya que} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Por otra parte:

$$\ln(1+u)\to u \quad y \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}u \to \operatorname{sen} u \quad \text{si } u\to 0.$$

Por consiguiente:

$$y = -\pi/2.$$

2-58. $y = \dfrac{1}{n}$ si $n \neq 0$.

Ha sido necesario poner $x = 1 + u$.

2-59. Poniendo $x = 1 + u$:

$$y = u \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1 + u) = -u \cot \frac{\pi}{2} u,$$

$$y \approx -\frac{2}{\frac{\pi}{2} u} = -\frac{2}{\pi}.$$

2-60. y no es una forma indeterminada para $x = 1$.

2-61. $y = -\pi^2/8$.

2-63. Para $x = 1$, $\quad y = \dfrac{\cos n - \cos 1}{1 - n^2}$.

Esta no es una forma indeterminada.

2-64. Para $n = \infty$: $\quad y = \dfrac{1 - 1}{\infty} = 0.$

2-65. Para $x = \infty$, y es de la forma ∞^{∞}.

$$\ln y = x \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right],$$

$$\ln y = x\left(-\frac{2}{x}\right) = -2.$$

Por consiguiente $y = e^{-2}$.

2-66. Forma indeterminada ∞^0 para $x = \infty$.

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln (\ln x).$$

Ahora bien, $\ln x$ varía más despacio que x y $\ln (\ln x)$ varía más despacio. Por consiguiente, $\ln y \approx 0$ e $y = e^0 = 1$.

2-67. Aquí es preciso volver a calcular y para $n = \infty$ y x constante; $y = \dfrac{0}{0}$.

Por la regla de Lhôpital se obtiene:

$$\frac{N'}{D'} = \frac{x}{3n^2}\left(\frac{1}{\cos^2 x/\sqrt{n}} - \cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Si $n \to \infty$, $\quad y \to 0$, $\quad y = 0$.

2-68. El mismo ejercicio que el núm. **2-66.**

2-69. $y = \sqrt{ab}$ para $x = \infty$.

2-71. Forma indeterminada $y = 1^\infty$.

Tomar ln y y recordar que:

$$\ln(1+u) \approx u \quad \text{y} \quad \cos u = 1 - u^2/2,$$

$$y = e^{-2} \quad \text{para} \quad x = \infty.$$

2-72. $y = e^{-a}$ para $x = \infty$.

2-73. $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, $\quad x - \pi/4 \to 0$,

$y = 1^\circ = 1$: no es una forma indeterminada.

2-74. Es preciso poner $\quad x = 3 + u \quad$ con $\quad u \to 0$.

$$y = -u \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}u\right) = u \cot\frac{\pi u}{6}$$

$$y \approx \frac{u}{\pi u/6} = \frac{6}{\pi}.$$

2-75. $y = \pi$.

2-76. Por la regla de Lhôpital: $y = -1$.

2-77. Forma indeterminada: $0 \cdot \infty$.

y puede escribirse:

$$y = \frac{x - \pi/2}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{N}{D},$$

$$N'/D' = -\operatorname{sen}^2 x.$$

Para $x = \pi/2$, $\quad y = -1$.

2-78. Para $x = \pi/2, \quad y = 1^{\infty}$.

Por el mismo sistema que en el ejercicio anterior se obtiene: $y = e^{4/\pi}$.

2-79. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2a}{2a}$ para $x = a$.

2-80. Es preciso poner $x = a + u$ con $u \to 0$.

Observar que:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{a}\right) = 1 - \frac{u^2}{2a^2} \quad \text{y} \quad \left[1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2}.$$

Respuesta: $y = -1$ para $x = a$.

2-81. $y = \dfrac{p}{a \cos a}$.

CAPITULO III

ESTUDIO DE SERIES

3-1. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n}}.$$

Cuando $n \to \infty$, $\frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$, lo mismo que $\frac{1}{n}$ y $\frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Por consiguiente $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to x$,

si $x < 1$ convergente,
si $x > 1$ divergente,
si $x = 1$ dudosa.

3-2. Para $x > 1$ serie convergente.
Para $x \leqslant 1$ serie divergente.

3-3. El término general U_n puede escribirse:

$$u_n = (-1)^n \operatorname{sen} a\pi/n.$$

Es una serie alterna.

Desde $n > 2a$, la serie es alterna para valores absolutos decrecientes:

$$|u_{n+1}| < |u_n|.$$

Por consiguiente, la serie es convergente.

3-4. $$u_n = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{1 + \frac{c}{b}n}\right)$$

$1 < n$ y $1 + \frac{c}{b}n \leqslant \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Por consiguiente:

$$\frac{1}{1+\frac{c}{b}n} \geqslant \frac{1}{n\left(1+\frac{c}{n}\right)}$$

y este último término tiende a 0 cuando n tiende a infinito.

Por consiguiente, la serie es divergente.

3-5. $u_n < \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}$.

Siendo convergente esta serie, la serie es también convergente.

3-6. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n^2} \to 0$.

Serie convergente.

3-7. Serie convergente: $u_n \to \frac{1}{2} < 1$.

3-9. si $|x| < 1$, la serie es absolutamente convergente;

si $|x| > 1$, la serie es divergente para $x > 1$ y para < -1 la serie es alterna divergente.

Para $x = \pm 1$, serie divergente.

3-10. Ya que $\sqrt{n} < n$, $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Como la serie armónica de término general $u_n = 1/n$ es divergente, la serie propuesta es divergente también.

3-11. Si $a > 1$; serie convergente; *si* $a \leqslant 1$, serie divergente.

3-12. Al fin de algunos términos de la serie,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{\sqrt{n}} > \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

En el núm. **3-10**, se ha demostrado que la serie de la que el término general $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Por consiguiente la serie propuesta es divergente.

3-13. Considerar el desarrollo en serie, ya que $u_n \to 0$.
La serie es convergente.

3-14. $$\left|\frac{u_{n+1}}{n_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{n+1}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{1}{1+1/n}\cdot\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{n} = A\cdot B\cdot C$$

$A \to 0$ cuando $n \to \infty$,

$B \to 1$ cuando $n \to \infty$,

$C \to 1/e$ cuando $n \to \infty$.

Por consiguiente:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{n_n}\right| \to 0.$$

Serie absolutamente convergente.

3-15. $|x| < 1$, serie convergente,

$|x| > 1$, serie divergente,

$x = 1 \pm 1$, serie divergente.

3-16. Serie divergente.

3-17. Consideremos $n > 2$.

$$\sum u_n = \frac{1}{2\,(\ln 2)^3} + \frac{1}{3\,(\ln 3)^3} + \frac{1}{4\,(\ln 4)^3} + \ldots \quad \text{con} \quad u_{n+1} < u_n,$$

$$\sum u_n = \frac{2}{2\,(\ln 2)^3} + \frac{4}{4\,(\ln 2)^3} + \ldots < \sum \frac{1}{(\ln 2^n)^3}.$$

Por consiguiente: $\sum u_n < \dfrac{1}{n^3\,(\ln 2)^3}$ ... que es una serie de Riemann. Por consiguiente la serie es convergente.

3-18. Serie convergente

$$a < 1 \qquad a > 1.$$

Serie divergente

$$a > 1, \qquad a \leqslant 1.$$

3-20. La serie es convergente, ya que $u_n < 1/n^2$.

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Si $n \to \infty$, $\quad S_n = 1$.

3-21. Solución en el Curso.

3-22. $|x| < 1$ serie absolutamente convergente,

$x = 1$ serie convergente,

$x < -1$ serie divergente.

Es preciso tomar un valor dado de x para calcular la suma.

3-23. $u_n < 1/n^3$: serie convergente.

3-24. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{1}{x}$

si $x > 1$, serie convergente,

si $x \leqslant 1$, u_{n+1}/u_n tiende a 1 para valores inferiores.

La serie es divergente.

3-25. Serie divergente, ya que $u_n \to 1$.

3-27. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}.$$

Ahora bien:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots$$

$$(n+1)! = (n+1)n! = n(n+1)(n-1)(n-2).$$

Ya que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Por consiguiente la serie es convergente.

3-28. Serie alterna convergente.

3-29. n^n aumenta más rápidamente que $n!$, por consiguiente $u_n \to 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Serie convergente.

3-30. $u_n \to 0$ ya que n^n varía más rápidamente que x^n.

Serie absolutamente convergente.

3-31. $u_n < \dfrac{\pi}{n\sqrt{n}}$ ya que el seno es menor que el ángulo.

$$u_n < \frac{\pi}{n^{3/2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Serie convergente.

3-32. Supongamos $x > 0$.

$$u_n = \frac{x^n}{x^{2n}+1}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \cdot \frac{x^{2n}+1}{x^{2n+2}+1} \approx \frac{1}{x}.$$

si $x > 1$, serie convergente;
si $x < 1$, serie divergente;
si $x = 1$, serie divergente.

3-34. $u_n \approx e^{-n} \to 0$ con $= 1/n$.

Serie convergente.

3-35. $x < 1$, serie convergente;

$x \geqslant 1$, serie divergente.

3-36. $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{\ln n} \to 0.$

Serie convergente.

3-37. Supongamos, $x > 0$.

$x < 1$, serie convergente;
$x > 1$, serie divergente;
$x = 1$, serie semiconvergente.

En este último caso, se tiene una serie armónica alterna.

3-38. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n^2(2n+1)} \to 0.$

Serie convergente.

3-39. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}.$$

Se ha demostrado, página ... del curso, que si $u_{n+1}/u_n < \frac{1}{2}$, $R_p < u_p$ el error total $\sum \varepsilon$ es la suma de los errores sobre cada término, a la que es preciso añadir el valor del resto.

1.º Cálculo de e^2.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}. \qquad \text{Para} \quad n = 4, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, a partir de la cuarta fila, $R_4 < 0{,}5$. Se precisan siete decimales, dada la precisión que se pide

$$S_{13} = 7{,}389\,055,$$

$$\sum_{\varepsilon} = 11 \cdot 10^{-7} + 1{,}3 \cdot 10^{-6} = 2{,}4 \cdot 10^{-6},$$

$$e^2 = 7{,}389\,055 \quad \text{hasta casi} \quad 2{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

2.º Cálculo de $e^{1/4}$.

$$R_p < \frac{u_p}{4}\left(\frac{1}{1 - 1/4}\right) < \frac{u_p}{3}$$

$$e^{1/4} = 1{,}284\,024 \quad \text{hasta casi} \quad 5{,}66 \cdot 10^{-6}$$

ya que $$\sum_{\varepsilon} = 3 \cdot 10^{-6} + 2{,}66 \cdot 10^{-6} = 5{,}66 \cdot 10^{-6}.$$

3.º Cálculo de $e^{1/2}$.

$$R_p < u_p,$$

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{16 \cdot 24} + \frac{1}{32 \cdot 120} + \frac{1}{64 \cdot 720} + \frac{1}{128 \cdot 5\,040} + R,$$

$$\sqrt{e} = 1{,}648\,719 \quad \text{hasta casi} \quad 5 \cdot 10^{-6}.$$

4.° Cálculo de $\sqrt[5]{e}$.

$$e^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25 \cdot 2} + \frac{1}{125 \cdot 6} + \frac{1}{625 \cdot 24} + \frac{1}{3\,125 \cdot 120} + R$$

$$e^{1/5} = 1 + 0{,}2 + 0{,}04 + 0{,}001\,333 + 0{,}000\,066 + 0{,}000\,002$$

$$= 1{,}241\,401 \quad \text{hasta casi} \quad 4 \cdot 10^{-6}.$$

ε sobre el primer término $= 0$
ε sobre el segundo término $= 0$
ε sobre el tercer término $= 0$
ε sobre el cuarto término $< 10^{-6}$
ε sobre el quinto término $< 10^{-6}$
ε sobre el sexto término $< 10^{-6}$.

$$\sum_{\varepsilon} < 3 \cdot 10^{-6} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\text{resto}} < \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$$

$$\sum_{\varepsilon} + \varepsilon_{\text{resto}} < 4 \cdot 10^{-6}.$$

5.° Cálculo de $e^{1/6}$.

$$e^{1/6} = 1{,}181\,357 \quad \text{hasta casi} \quad 5{,}2 \cdot 10^{-6}.$$

3-40. ε sobre los términos: $3 \cdot 10^{-4}$.
ε sobre el resto: $2 \cdot 10^{-4}$.
Valor de la serie: 1,175 0 hasta casi $5 \cdot 10^{-4}$.

3-41. Valor de la serie: 1,291 2 hasta casi 10^{-4}.

3-43. Se ha visto (27,3) que $\ln(1 + x)$ es convergente si $|x| < 1$.
Ahora bien, $1/n^2 < 1$. Por consiguiente la serie es convergente.

3-44. La serie es convergente. Aplicar la regla de CAUCHY.

3-45. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n-1)^3}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx \frac{(n+1)^3}{n^4} \to 0.$$

La serie es convergente.

3-46. Serie armónica divergente.

3-47. $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{2}. \qquad \text{Aquí} \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Para $|x| < 2$ la serie es absolutamente convergente.
Zona de convergencia $-2 < x < 2$.

3-48. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = x\left(\dfrac{1}{1+1/2n}\right)^2 \to x.$

si $x = 1$, $u_n = \dfrac{1}{(2n)^2}$ serie convergente.

si $x = -1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n^2}$ serie absolutamente convergente.

si $x < -1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n^2}|x|^n$ ... el término general no tiende a cero.

Zona de convergencia $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3-49. Zona de convergencia $-3 < x < 3$.

3-51. $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{|x|}{4} \cdot \sqrt[n]{n+1} \to \dfrac{|x|}{4}, \quad \alpha = \dfrac{1}{4}.$

Zona de convergencia $-4 < x < 4$.

3-52. $S_n \to e^x$.

La serie es absolutamente convergente, sea cual sea x.

En efecto:

$$S_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

3-53. Zona de convergencia $-2 < x \leqslant 2$.

3-54. $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \cdot \dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n-1)} \cdot \dfrac{n^3+2}{n^3+3n^2+3n+3} \to |x|.$

Si $|x| < 1$, serie absolutamente convergente.

Si $x = 1$, $u_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+2} \approx \dfrac{1}{n}$: serie divergente.

Si $x = -1$, $u_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+2}(-1)^n \approx \dfrac{(-1)^n}{n}$; serie semiconvergente.

Si $x > 1$, serie divergente.

Si $x < -1$, serie divergente, ya que u_n no tiende a cero.

Zona de convergencia $-1 \leqslant x < 1$.

3-55. Zona de convergencia $-1 < x < 1$.

3-56. Zona de convergencia $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3-57. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2}{(n+1)^2} \cdot |x|$ ya que $(n+1)! = (n+1)n!$

Por consiguiente $\frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

La serie es absolutamente convergente, sea cual sea x.

$$S_n = e^x(1+x) - 1.$$

3-58. Zona de convergencia $-2 < x < 2$.

3-59. $\sqrt{u_n} = \operatorname{tg}\left(a + \frac{\alpha}{n}\right) \to \operatorname{tg} a$ cuando $n \to \infty$.

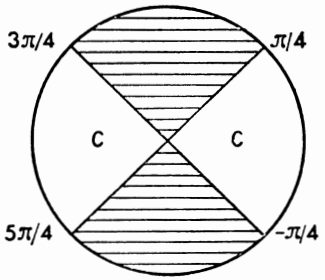


FIG. 3-59

Si $|\operatorname{tg} a| < 1$, serie absolutamente convergente.

Si $|\operatorname{tg} a| = 1$, hay dos posibilidades:

1) $\operatorname{tg} a = +1, \quad a = \frac{\pi}{2} k\pi.$

$$u_n = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right)\right]^n = \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha/n}{1 - \operatorname{tg} \alpha/n}\right]^n$$

$$\ln u_n = n\left[ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}\right)\right] \approx n\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}\right)$$

$$\ln u_n = 2n\frac{\alpha}{n} = 2\alpha \quad \text{y} \quad u_n \to e^{2\alpha}.$$

siendo $\alpha > 0$, la serie es divergente.

2.° $\operatorname{tg} a = -1.$

$$a = -\frac{\pi}{n} + k\pi, \qquad u_n \to e^{-2\alpha} \text{ la serie diverge.}$$

Zonas de convergencia:

$$-\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{4}; \quad \frac{3\pi}{4} < a < \frac{5\pi}{4}.$$

3-60. $\sqrt[n]{u_n} = \operatorname{sen}\left(a + \frac{\alpha}{n}\right) \to |\operatorname{sen} a| < 1.$

Serie convergente para todos los valores de a, salvo:

$$a = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

3-61. El mismo ejercicio estudiado en el núm. **3-31.**

3-62. *Primer caso* $\alpha < 0.$

$$u = \frac{n^{-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}} \to \infty \text{ sea cual sea } \beta,$$

la serie es divergente.

Segundo caso $\alpha = 0.$

$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\beta}} > \frac{1}{n}$, la serie será siempre divergente.

Tercer caso $\alpha > 0.$

Este caso se subdivide en tres

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Si $\alpha < 1$, la serie es convergente:

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ si } \beta > 0;$$

Si $\beta < 0$, la serie será también convergente. Será preciso calcular S_n.

Si $\alpha = 1$, la serie converge para $\beta > 1$.
la serie diverge para $\beta \leqslant 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, la serie diverge.

El cuadro siguiente resume los casos posibles:

α \ β	< 2	$= 1$	> 1
< 1	Divergente	Divergente	Divergente
> 1	Convergente	Convergente	Convergente
$= 1$	Divergente	Divergente	Convergente

CAPITULOS IV y V

CALCULO DE IMAGINARIAS

4-1. Producto parcial:

$$(5 - 8j)(2 - 5j) = -30 - 41j.$$

Producto total:

$$(-30 - 41j)(2 - 3j) = -183 + 8j \equiv a + jb$$

con $a = -183 \qquad b = +8.$

4-2. Multiplicando por la cantidad conjugada del denominador se tiene:

$$a + jb \equiv 2 + 5j.$$

4-3. Respuesta: $0{,}685 + 0{,}392\ j.$

4-4. $21 - j16 = a^2 + 2jab - b^2$, de donde:

$b^4 + 21b^2 - 64 = 0, \qquad b = \pm 1{,}64, \qquad a = \mp 4{,}8.$

Hay, pues, dos soluciones.

Primera solución: $4{,}8 - j\ 1{,}64$

Segunda solución: $-4{,}8 + j\ 1{,}64.$

4-5. $r = 8{,}6,$

$\text{tg}\ \varphi = -0{,}786, \qquad \varphi = -39^\circ,$

$-7 + 5j = 8{,}6\ (\cos 39^\circ - j \operatorname{sen} 39^\circ),$

$-8 - 11j = 13{,}6\ (\cos 54^\circ + j \operatorname{sen} 54^\circ).$

4-6. Basta volver sobre las anteriores respuestas.

4-7. 1.° $9{,}4 + j\ 3{,}4.$ 2.° $3{,}83 - j\ 3{,}21.$

3.° $1{,}53 + j\ 1{,}28.$ 4.° $2{,}87 - j\ 0{,}88.$

4-8. $a + jb \equiv 115 + 133j.$

4-9. $a + jb \equiv -211 + 295j.$

4-11. $a + jb \equiv 0{,}251 - 0{,}273j.$

4-12. $a + jb \approx -0{,}483 - 0{,}426j.$

4-14. $15 + 7j \equiv a^2 - b^2 + 2jab,$

$15 = a^2 - b^2$ y $7 = 2ab,$

de donde: $b = \pm 0{,}88, \quad a = \pm 3{,}97,$

$\sqrt{15 + 7j} = \pm (3{,}97 + 0{,}88j), \quad r_1 = 4{,}08 = r_2,$

$(15 + 7j)^2 = 176 + 210j, \quad r^2_1 = 274 = \sqrt{176^2 + 210^2}.$

4-15. $\sqrt{a + jb} = \pm (3{,}525 + 1{,}845j),$

$(a + jb)^2 = -88 + 234j.$

4-17. $\sqrt{a - jb} = \pm (4 - j),$

$(a - jb)^2 = +161 - 240j.$

4-18. $\sqrt{-a + jb} = \pm (1{,}91 + 3{,}4j),$

$(-a + jb)^2 = -(105 + 208j).$

4-19. $\sqrt{-14 - 19j} = \pm (2{,}19 - 4{,}34j), \quad \sqrt{r_1} = 4{,}86,$

$(-14 - 19j)^2 = -165 - 522j, \quad r^2_1 = 556 = \sqrt{165^2 + 532^2}.$

4-21. $\sqrt{-a - jb} = \pm (1{,}643 - 4{,}87j),$

$(-a - jb)^2 = 185 + 672j.$

4-22. El vector está en el primer cuadrante:

$$r = \sqrt{64 + 9} = 8{,}54,$$
$$\operatorname{tg} \varphi = 3/8 = 0{,}375, \quad \varphi = 20^\circ\, 30',$$
$$a + jb = 8{,}54(\cos 20^\circ\, 30' + j \operatorname{sen} 20^\circ\, 30').$$

4-23. Vector en el primer cuadrante:

$$21{,}1(\cos 31^\circ\, 30' + j \operatorname{sen} 31^\circ\, 30').$$

4-24. Vector en el cuarto cuadrante:

$$18{,}6(\cos 53^\circ\, 40' - \mathrm{j} \operatorname{sen} 53^\circ\, 40').$$

4-25. Vector del cuarto cuadrante:

$$r = 12{,}04, \quad \varphi = -41^\circ\, 40',$$
$$a + jb = 12{,}04(\cos 41^\circ\, 40' - j \operatorname{sen} 41^\circ\, 40').$$

4-27. Vector del segundo cuadrante:

$$19{,}71(\cos 120^\circ\, 30' + j \operatorname{sen} 120^\circ\, 30').$$

4-29. Vector del tercer cuadrante:

$$20{,}8(\cos 234^\circ\, 40' + j \operatorname{sen} 234^\circ\, 40').$$

4-30. $(1 + j)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + j \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}.$

4-31. El vector puede escribirse: $1/4\ (1 + j)^4$.
Ahora bien $(1 + j)^4 = -4$, $\quad (a + jb)^4 = -1.$

4-32. $(a + jb)^{-3} = \cos\dfrac{3\pi}{4} - j \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}.$

4-33. $(a + jb)^{2/3} = 2^{-1/3}\,(1 + j)^{2/3} = \cos\dfrac{\pi}{6} + j \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}.$

4-34. La suma es nula.

4-35. La diferencia de los dos vectores a la potencia 6 es: $-2j$.

4-36. $4^{5/2} = 32.$

4-37. Aquí $m = 2/3$, $\quad r^m = (49 + 25)^{m/2} = (74)^{1/3} = 4{,}2,$

$$\varphi = m\varphi_1, \quad \varphi_1 = 35^\circ\, 30', \quad \varphi = 96^\circ\, 10',$$
$$a = r\cos\varphi\ 4{,}2(-0{,}1) = -0{,}42,$$
$$b = r \operatorname{sen}\varphi = 4{,}2 \cdot 0{,}99 = 4{,}16,$$
$$(-a + jb)^{2/3} = -0{,}42 + 4{,}16j.$$

4-38. $2{,}52 + j.$

4-40. $r = 2{,}43$, $\quad r = 205^{1/6}$: pasar a logaritmos,

$$\varphi_1 = 65^\circ\, 10',$$
$$\varphi = m\varphi_1 = \frac{\pi + 65^\circ\, 10'}{3} = 81^\circ\, 30'$$
$$(-a - jb)^{1/3} = 0{,}357 + 2{,}4j.$$
$$0{,}357 = 2{,}43 \cdot 0{,}147,$$
$$2{,}4 = 2{,}43 \cdot 0{,}99.$$

4-41.
$$(5 - 7j)^{4/5}: \quad r_n = 5{,}5, \quad \varphi_n = -43^\circ\, 30',$$
$$(2 + 7j)^{1/3}: \quad r_n = 1{,}94, \quad \varphi_n = 24^\circ\, 10',$$
$$(-4 + 3j)^{1/2}: \quad r_n = 2{,}3, \quad \varphi_n = 71^\circ\, 30',$$

$$\frac{5{,}5\, e^{-43°30'\, j}}{1{,}94\, e^{24°10'} \times 2{,}3\, e^{71°30'}} = 1{,}23\, e^{-140\, j}$$

$a = 1{,}23(-0{,}766) = -0{,}94.$

$b = 1{,}23(-0{,}642) = -0{,}15.$

Respuesta: $-0{,}94 - 0{,}15j.$

4-42. $10^{-3}(5{,}22 + 1{,}4j).$

4-43. $a = 0{,}95 \cdot 0{,}815 = 0{,}774,$

$b = 0{,}95 \cdot 0{,}578 = 0{,}55,$

$a + j\,b = 0{,}774 + j0{,}55.$

4-45. $(2 + 5j)^{1/2}$: $r_n = 2{,}34$ $\varphi_n = 34°,$

$(-4 - 9j)^{2/3}$: $r_n = 4{,}6$ $\varphi_n = 160°,$

$(-3 + 8j)^{4/5}$: $r_n = 5{,}56$ $\varphi_n = 88°\ 30'.$

Respuesta: $1{,}92\, e^{j105°30'}.$

$105°\ 30' = (\pi - 70°\ 30')$ y $-\cos(+\ 74°\ 30') = -0{,}267,$

$\operatorname{sen} 74°\ 30' = 0{,}963.$

Respuesta: $-0{,}5 + 1{,}92j.$

4-46. $\operatorname{sen}^5 \varphi = \frac{1}{32j^5}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = \frac{1}{32j}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ ya que $j^5 = j,$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 - x^{-5} - 5(x^3 - x^{-3}) + 10(x - x^{-1}),$

$x^5 = e^{5j\varphi},$ ... etc.

y

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Por consiguiente:

$$\operatorname{sen}^5\varphi = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5\varphi - 5\operatorname{sen} 3\varphi + 10\operatorname{sen}\varphi).$$

4-47. Respuesta: $\frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3).$

Comparar la respuesta con el resultado de la página ... del curso.

4-48. $j^6 = -1,$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15x^{-2} - 6x^{-4} + x^6$$

$$y = -\frac{1}{64}\left[x^6 + x^{-6} - 6(x^4 + x^{-4}) + 15(x^2 + x^{-2}) - 20\right],$$

$$y = -\frac{1}{64}(2\cos 6\varphi - 12\cos 4\varphi + 30\cos 2\varphi - 20),$$

$$y = -\frac{1}{32}(\cos 6\varphi - 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi - 10).$$

4-49. $y = \frac{1}{32}(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10).$

4-50. Volviendo a los cálculos hechos en los ejercicios números **4-47** y **4-48**, y agrupando los términos, se tiene la respuesta:

$$-\frac{1}{512}(\cos 10\varphi - 2\cos 8\varphi - 3\cos 6\varphi + 8\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi - 6).$$

4-52. $\operatorname{sen}^3\varphi \cdot \cos^3\varphi = \frac{1}{32}(3\operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} 6\varphi).$

4-53. $(10 \cdot 20)\angle 5 - 10 = 200\angle -5.$

4-54. $0{,}5\angle -5.$

4-55. $\frac{8}{7}\angle 3 - 6 + 4 = 1{,}14\angle 1.$

4-57. $2^3 \cdot 4\angle -(3 \cdot 10) - 20 = 32\angle -50.$

4-58. $3^2 \cdot 10^3\angle -40 + 150 = 9.000\angle 110.$

4-59. $\sqrt{1225}\angle 22 = \pm 35\angle 11°.$

4-60. $1 - 4\,\mathrm{j}\quad r = \sqrt{17}\qquad \varphi = -76\qquad = \sqrt{17}\angle -76$

$1 - 3\,\mathrm{j}\quad r = \sqrt{10}\qquad \varphi = -71°\,40'\qquad = \sqrt{10}\angle -71°\,40'$

$$y = \frac{17}{10\sqrt{10}}\angle -152 + 215 = 0{,}538\angle 63$$

$$y = 0{,}538\,(\cos 63° + \mathrm{j}\operatorname{sen} 63°) = 0{,}242 + \mathrm{j}\,0{,}479.$$

4-62. $40 \angle 53.$

4-63. $(2 \angle -4)^6 \cdot 2 \angle 4 = 128 \angle -20.$

4-64. $y = 25 \angle -5 \cdot \sqrt{125 \angle 30} = 25 \angle -5 \cdot 10{,}73 \angle 15$

$y = 253 \angle 10.$

4-65. $2 \angle -10 = 1{,}96 - \mathrm{j}\, 0{,}34 = A$

$4 \angle 20 = 3{,}76 + \mathrm{j}\, 1{,}36 = B.$

$A + B = 5{,}72 + \mathrm{j}\, 1{,}02 \qquad r = 5{,}82 \qquad \varphi \approx 10°$

$A + B = 5{,}82 \angle 10.$

4-66. $12{,}4 \angle -134° 50'$

4-68. $\dfrac{2 + (a+1)^2}{2(a^2+1)} + j\,\dfrac{(a+1)^2 + 2}{2(a^2+1)}.$

4-69. $x^4 = 2 \cdot e^{2j\pi + 2k\pi j}$

ya que $1 = e^{j(2\pi + 2k\pi)}$: curso núm. 49

$x = 2^{1/4} \cdot e^{j(\pi/2 + k\pi/2)}.$

Si sucesivamente se da a k los valores 0, 1, 2, 3:

$k = 0, \quad x_1 = j\sqrt[4]{2} \qquad$ ya que $e^{j\pi/2} = j$

$k = 1, \quad x_2 = -\sqrt[4]{2} \qquad$ ya que $e^{j\pi} = -1$

$k = 2, \quad x_3 = -j\sqrt[4]{2} \qquad$ ya que $e^{j3\pi/2} = -j$

$k = 3, \quad x_4 = \sqrt[4]{2} \qquad$ ya que $e^{j2\pi} = 1.$

Soluciones:

$x_1 = j\sqrt[4]{2}, \qquad x_2 = -\sqrt[4]{2},$

$x_3 = -j\sqrt[4]{2}, \qquad x_4 = \sqrt[4]{2}.$

4-70. $x_1 = -1,\ x_2 = 1 + \sqrt[3]{2},$

$x_3 = 1 + \sqrt[3]{2}\, e^{j2\pi/3},\ x_4 = 1 + \sqrt[3]{2}\, e^{j4\pi/3}.$

4-72. $x^3 = +2^3\, e^{j(\pi+2k\pi)} = -2^3$

$x = 2\, e^{j(\pi/3+2k\pi/3)}$.

$k = 0, \quad x_1 = 2\, e^{j\pi/3} = 1 + j\sqrt{3}$

$k = 1, \quad x_2 = -2 = 2\, e^{j\pi}$

$k = 2, \quad x_3 = -2\, e^{j2\pi/3} = -2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - j\sqrt{3}.$

CAPITULO VI

INFINITESIMOS

6-1. $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x \to 0$ para $x \to 0$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$$

$$y = \frac{3x^3}{6} = \frac{x^3}{2}$$

Parte principal: $x^3/2$, de tercer orden.

6-2. Límite de $y \to 0$ con x.

Pero puede escribirse:

$$y = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/2} = -\frac{x^2}{12}$$

$$y = \sqrt{x}\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{12}\right)\right] = \frac{1}{12}x^{5/2}$$

6-3. $y = 2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right) - x^3.$

estando el desarrollo del segundo paréntesis limitado por $1 - \cos x$, ya que $y = 2 \operatorname{sen} x\,(1 - \cos x) - x^3$

$$y = -\frac{2x^5}{12} - \frac{x^5}{12} = -\frac{3x^5}{12} = -\frac{x^5}{4}.$$

Parte principal de y: $-x^5/4$, de quinto orden.

6-4. Parte principal de y: $x^3/12$, de tercer orden.

6-6. $y = 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + x - 2\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}\right)$

$$y = \frac{2x^3}{3}.$$

6-7. $y = 1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2$.

$y = x^4/8$: parte principal de cuarto orden.

6-8. $x \ln a$.

6-9. $x/2$, primer orden.

6-10. Ejercicio en el curso.

6-11. $y = e^{x \ln x} - e^{x \ln x \operatorname{sen} x}$. Ahora bien $e^x = 1 + x + \ldots$

$y \approx x (\ln x - \ln \operatorname{sen} x)$

$$y \approx x \cdot \ln \frac{x}{\operatorname{sen} x} \approx x \ln \frac{1}{1 - x^2/6} \approx \frac{x^3}{6}.$$

Parte principal: $x^3/6$ de tercer orden.

6-12. Parte principal: $-x^{1/2}$. Orden 1/2.

6-14. Parte principal: $-x^3$ tercer orden.

6-15. Es preciso utilizar los tres desarrollos de x, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x/2$, después de agrupar los términos en x siguiendo sus potencias crecientes.

$$\text{Términos en } x\text{: } \frac{24x - 24x}{K} = 0.$$

$$\text{Términos en } x^3\text{: } \frac{720x^3 - 720x^3}{K} = 0.$$

$$\text{Términos en } x^5\text{: } x^5\left(-\frac{1}{450} + \frac{2}{225} - \frac{1}{150}\right) = -\frac{1}{225}x^5.$$

Tal es la parte principal de y, de quinto orden.

6-16. y es de la forma u/v.

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

$$dy = \frac{(b + x)^n\,dx - (a + x)n(b + x)^{n-1}\,dx}{(b + x)^{2n}}$$

$$dy = \frac{(b - na) + x(1 - n)}{(bx + x)^{n+1}}\,dx.$$

6-17. $dy = 2e^{x^2} \cdot x^3\,dx.$

6-18. $dy = \dfrac{(a - b)}{2(x - a)^{1/2}(x - b)^{3/2}}.$

6-19. Poner: $y = \operatorname{arc\,tg} u\,; \qquad dy = \dfrac{du}{1 + u^2}.$

$$du = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x)}{1 - x^2}\,dx = dx\,(1 - x^2)^{-3/2}$$

$$dy = dx\,(1 - x^2)^{-1/2}.$$

6-20. $dy = -\dfrac{2a}{x^2 - a^2}\,dx.$

6-21. Poner $y = \ln u.$

$$dy = \frac{dx}{x \cdot \ln x}.$$

6-23. $dy = -3\,\operatorname{sen}^3 x\,dx.$

6-24. $y = \operatorname{arc\,tg} u, \qquad du = \dfrac{1 + a^2}{(1 - xa)^2}$

$$dy = \frac{1 + a^2}{(1 + a^2)\,(1 + x^2)}\,dx.$$

6-25. $dy = 2/3\,x(x^2 + a)^{-2/3}\,dx.$

6-26. Poner $y = \ln u.$

$$dy = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

$$dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

6-27. $dy = \text{arc tg}\, x\, dx + \dfrac{x\, dx}{1+x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\, dx.$

$dy = \text{arc tg}\, x\, dx.$

6-28. La diferencial será de quinto orden.

6-29. $y = \text{arc cos}\, u.$

$du = \dfrac{\text{sen}\, x(b^2 - a^2)}{(a + b\cos x)^2}\, dx,$

$dy = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}\, dx.$

6-30. $dy = b \cdot y \cdot x^{b-1} \cdot \ln a\, dx.$

En efecto, y se escribe

$y = a^u$ y $dy = a^u \ln a\, du,$

con $du = b \cdot x^{b-1}\, dx.$

6-32. $dy = e^{\text{sen}\, x \cdot \ln \cos x} (\cos x \cdot \ln x \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x)\, dx.$

6-33. y puede escribirse:

$y = e^{ax \ln x/a} = e^u.$

$dy = e^{ax \ln a/x} \cdot a \left(\ln \dfrac{x}{a} + 1\right) dx.$

6-34. y puede escribirse:

$y = e^{\ln x \cdot \ln \text{tg}\, x} = e^u.$

$du = \dfrac{\ln x}{\text{tg}\, x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\ln \text{tg}\, x}{x} = -\dfrac{\ln x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \dfrac{\ln \text{tg}\, x}{x}$

$dy = e^{\ln x \cdot \ln \text{tg}\, x} \left(\dfrac{\ln x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \dfrac{\ln \text{tg}\, x}{x}\right) dx.$

6-35. $dy = -\cos \sqrt{a^2 - x^2} \times \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$

6-36. $dy = n \cdot \cot x.$

6-38. $dy = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \dfrac{1}{1 + (\text{arc sen}\, x/a)^2} \cdot dx.$

6-39. Ejercicio idéntico al del número **6-30** sustituyendo b por n.

6-40. y puede escribirse:

$$y = \ln \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}{2\sqrt{a + bx}} = \ln u$$

$$du = \frac{2\sqrt{a + bx}\left[\dfrac{b}{2\sqrt{a+bx}} - \dfrac{(-b)}{2\sqrt{a-bx}}\right] - (\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}) \cdot \dfrac{2b}{2\sqrt{a + bx}}}{4(a + bx)}.$$

Previa simplificación:

$$du = \frac{ab}{2(a+bx)^{3/2}(a - bx)^{1/2}},$$

$$dy = \frac{du}{u}, \quad dy = \frac{ab}{(a+b)[(a - bx)^{1/2} - (a - bx)]}.$$

6-41. $dy = -\dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1 - x)}.$

6-42. y es de la forma $y = \arccos u$.

$$dy = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\,(1 - e^{2\sqrt{x}})}\,dx.$$

6-43. y es de la forma $y = u^{1/4}$.

Observar que $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$.

$$dy = \frac{1}{2}\,\frac{(e^x + e^{-x})^{-3/4}}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^{-3/4}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x \cdot e^x - \cos x \cdot e^{-x}}{1 + \operatorname{sen} 2x}.$$

6-45. $du = \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$

$$dy = 2u\,du = \frac{dx}{x^2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x}\right).$$

6-46. $dy = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot dx.$

6-47. $dy = \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x(a - b)}{y}\,dx.$

6-49. $dy = \cos^3 x \cdot dx.$

6-50. $y = u/v, \quad du = e^{x^2} \cdot 2x\,dx.$

$$dy = \frac{2x^2 \cdot e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}\,dx,$$

$$dy = \frac{2x^2-1}{x} \cdot y \cdot dx.$$

6-51. $$dy = \left(\operatorname{arc\,sen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

6-52. y es de la forma $y = \ln u.$

$$dy = \frac{(2-x)}{2x(x^2-x+1)}\,dx.$$

6-53. $y = \operatorname{arc\,tg} u.$

$$dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}\,dx.$$

6-54. $dy = -dx.$

6-55. $$dy = -\frac{10}{3} \cdot \frac{3x-1}{\sqrt[3]{(3x^2-2x)^4}}\,dx.$$

6-56. $$dy = \frac{3x+5}{(1-x)^2\sqrt{3x^2+5}}\,dx.$$

6-57. $$dy = \frac{-4x^2+7x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

6-58. $$dy = -\frac{4x^2+7x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

6-59. y es de la forma $y = \ln u.$

$$du = \frac{1}{3}(x^3-3x^2+6x)^{-2/3}(3x^2-6x+6)$$

$$dy = \frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+6} \cdot \frac{dx}{x}.$$

6-60. $$dy = \frac{du}{u}$$

$$du = \frac{\sqrt{x^2+4}\,(3x^2+2)}{3(x^3+2x)^{2/3}} + \frac{(x^3+2x)^{1/3} \cdot x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$dy = \frac{(x^2+4)(3x^2+2) + (x^3+2x)3x}{3(x^3+2x)^{2/3}\cdot(x^2+4)^{1/2}\cdot(x^2+4)^{1/2}\cdot(x^3+2x)^{1/3}}\,dx$$

$$dy = \left(\frac{3x^2+2}{3x^3+6x} + \frac{x}{x^2+4}\right)dx$$

6-61. $dy = \dfrac{8}{x}\cdot\dfrac{3x^5+1}{2x^5-1}\ln^3\left(2x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Desarrollo de este cálculo:

$$y = u^4, \quad dy = 4u^3\,du, \quad \text{con} \quad u = \ln\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$u = \ln v, \quad dv = 6x^2 + 2x^{-3} = 2(3x^2+x^{-3}),$$

$$du = 2(3x^2+x^{-3})\cdot\frac{1}{2x^3-1/x^2} = \frac{2}{x}\left(\frac{3x^5+1}{2x^5-1}\right)$$

$$dy = 4\ln^3\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{3x^5+1}{2x^5-1}.$$

6-63. $dy = 2e^{\ln^2 x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\,dx.$

6-64. $dy = \dfrac{2}{1+x^2}\,dx.$

6-65. y es de la forma $y = a^u$.

$$dy = a^u\cdot\ln a\cdot du,$$

$$dy = 7^{-1/x}\cdot\ln 7\cdot\frac{dx}{x^2}$$

6-66. y es de la forma $y = e^u$.

6-67. $\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)dx.$

6-68. $y = a\cdot u^4, \quad dy = 4au^3\,du,$

$u = \operatorname{sen} e^{-3x},$

$du = -3e^{-3x}\cdot\cos e^{-3x}\cdot dx,$

$dy = 4\cdot 2\cdot\operatorname{sen}^3 e^{-3x}\,(-3e^{3-x}\cdot\cos e^{-3x})\,dx,$

$dy = -24e^{-3x}\cdot\operatorname{sen}^3 e^{-3x}\cdot\cos e^{-3x}\,dx.$

6-69. $dy = \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}^2\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x/2} - \dfrac{2}{x^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{4}{x}\right)dx.$

6-70. En esta función y no es válido en el terreno real.

En efecto, es preciso que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 1$, lo que es manifiestamente imposible cuando x es real, ya que $1 - x^2 < 1$.

6-71. $dy = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$

6-72. Libre.

6-73. y es de la forma $y = \ln u$.

$$du = \frac{dv}{1+v^2}, \qquad \text{con} \qquad v = 2x^3,$$

$$dy = \frac{6x^2}{(1+4x^6)\operatorname{arc\,tg} 2x^3}\,dx.$$

6-74. y es de la forma $y = u/v$.

$$dy = \frac{(1-e^{x/2})(\frac{1}{2}e^{x/2}) + (1+e^{x/2})(\frac{1}{2}e^{x/2})}{(1-e^{x/2})^2}\,dx,$$

$$dy = \frac{e^{x/2}}{(1-e^{x/2})^2}\,dx.$$

6-75. $dy = \left(-\dfrac{\operatorname{arc}}{2}\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)dx$

ya que y es de la forma:

$y = u \cdot v - m,$

$dy = v\,du + u\,dv - dm.$

6-76. y es de la forma $y = \operatorname{arc\,tg} u$,

y

$$x^x = e^{x \ln x},$$

$$du = x^x(\ln x + 1)\,dx,$$

$$dy = \frac{x^x(\ln + 1)}{1+x^{2x}}\,dx.$$

6-77. y es de la forma $y = \ln u$.

$$u = v^2, \qquad v = e^{2x} + a^{3x},$$

$$du = 2(e^{2x} + a^{3x})(2e^{2x} + 3a^{3x} \cdot \ln a)\,dx,$$

$$dy = \frac{2(2e^{2x} + 3a^{3x} \cdot \ln a)}{e^{2x}\,a^{3x}}\,dx.$$

CAPITULO VII

DIFERENCIALES

7-1. Siendo x e y los lados del rectángulo, el perímetro P será:

$$P = 2x + 2y = 10,$$

$$y = \frac{P - 2x}{2} = 5 - x,$$

y la superficie S:

$$S = x \cdot y = x(5 - x) = 5x - x^2$$

$$dS = (5 - 2x)\,dx$$

para

$dS > 0$, es necesario $5 - 2x > 0$, es decir $2x < 5$, $x < 2{,}5$.

Respuesta: $x < 2{,}5$ m.

7-2. $S = x \cdot y$.

Ahora bien

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AK}{AH} \quad \text{o} \quad \frac{x}{100} = \frac{50 - y}{50},$$

$$x = 100 - 2y \qquad y = \frac{100 - x}{2}.$$

Por consiguiente

$$S = 50x - \frac{x^2}{2}$$

$$dS = 50\,dx - x\,dx = (50 - x)\,dx.$$

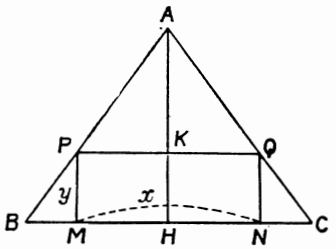


FIG. 7-2

7-3. $dS = 2\pi R \cdot dR,$

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi R \cdot \frac{dR}{dt} \qquad \text{ahora bien} \qquad \frac{dR}{dt} = 5\ \text{m/s},$$

$$\frac{dS}{dt} = 6{,}28 \cdot 12 \cdot 5, \qquad \frac{dS}{dt} = 376{,}8\ \text{m}^2/\text{s}.$$

7-4. $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi h^3}{4}$ ya que $h = D,$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = 471\ \text{m}^3/\text{s}.$$

7-5. $\overline{OA} = x$ y $\overline{OB} = y,$

$$y = \sqrt{l^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{l^2 - x^2}}(-2x) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = V_B = -\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \cdot V_A.$$

Ya que dx/dt es la velocidad del punto $A = V_0$.

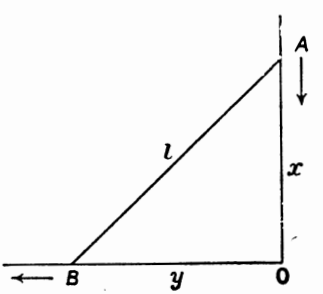


FIG. 7-5

7-6. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi h^3}{12},$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = 4 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{36} = 0{,}141 \text{ cm/s.}$$

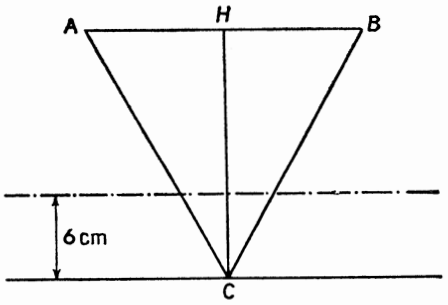


FIG. 7-6

7-7. Respuesta: $\frac{dS}{dt} = 9 \text{ cm}^2/\text{mm}$.

7-9. Las variaciones relativas del aumento se escriben:

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{d\theta} = 10^{-3},$$

$$S = L \cdot l \quad \text{y} \quad \frac{dS}{d\theta} = \frac{dL}{d\theta} \cdot l + \frac{dl}{d\theta} L,$$

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{L}\frac{dL}{d\theta} + \frac{1}{l}\frac{dl}{d\theta} = 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}2\ \%.$$

7-10. $V_1 = \frac{d\overline{OA}}{dt} = 50 \text{ km/h},$

$V_2 = \frac{d\overline{OB}}{dt} = 10 \text{ km/h}.$

Calculemos $\frac{dAB}{dt}$ $\qquad AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$

$$\frac{dAB}{dt} = \frac{\overline{OA}\frac{d\overline{OA}}{dt} + \overline{OB}\frac{d\overline{OB}}{dt}}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}}$$

Ahora bien: $\overline{OA} = V_1 t$, $\overline{OB} = V_2 t$.

$$\frac{dAB}{dt} = \frac{V_1^2 t + V_2^2 t}{t\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dAB}{dt} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}.$$

Respuesta: $\dfrac{dAB}{dt} = 51$ km/h.

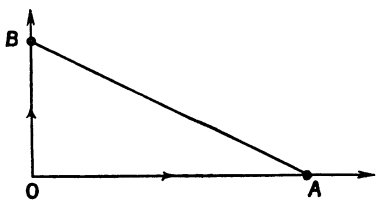


FIG. 7-10

7-11. $\dfrac{dS}{dt} = 0{,}2$ m²/s.

7-12. $\overset{\frown}{AM} = R\theta = \sigma$

$MB = y = R \operatorname{sen} \theta$

$$\frac{d\sigma}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = R\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Es preciso que: $\dfrac{d\sigma}{dt} = 2\dfrac{dy}{dt}$

$$R\frac{d\theta}{dt} = 2R\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad \text{sea } 2\cos\theta = 1$$

$\cos\theta = 1/2$, $\theta = \pi/3$.

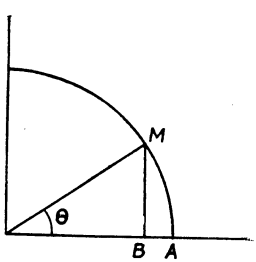


FIG. 7-12

7-13. $S = \frac{1}{2}\,AB \cdot AC \operatorname{sen} \widehat{BAC}$.

Ahora bien: AB, AC y $\widehat{BAC}$ varían.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dAB}{dt}\right) AC \operatorname{sen} \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\left(\frac{dAC}{dt}\right) AB \operatorname{sen} \widehat{BAC} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d\,\widehat{BAC}}{dt}\right) AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}.$$

Ahora bien: $AB = AC = BC = 20$ cm, $\widehat{BAC} = 60°$.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\,20\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,20\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,400 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{dS}{dt} = 10\sqrt{3} + 10 = 27{,}32 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

7-14. $x = \pm 2$.

7-15. Sea el lado a.

El perímetro es $6a$ y la apotema $a\sqrt{3}/2$.

$$S = \frac{6a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{6a}{2}\sqrt{3}\,\frac{da}{dt} = 3\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}1 \text{ m}^2/\text{s}.$$

7-16. Volumen del cilindro $= \pi R^2 h$,

Volumen de la semiesfera $= 2/3\pi R^3$.

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi Rh\,\frac{dR}{dt} + \pi R^2\,\frac{dh}{dt} + \frac{6\pi R^2}{3}\,\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi R\left[2(h + R)\,\frac{dR}{dt} + R\,\frac{dh}{dt}\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = 3{,}14 \cdot 10[2(20 + 10) \cdot 1 + 10 \cdot 2]$$

$$\frac{dV}{dt} = 2.512 \text{ m}^3/\text{mm}.$$

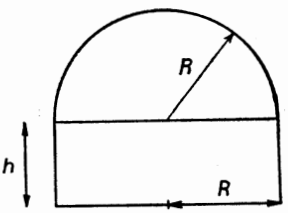


FIG. 7-16

7-17. $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

ya que: $\frac{dR}{dt} = +5$ cm/s. Calculemos $-\frac{dh}{dt}$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi Rh}{3} \cdot \frac{dR}{dt} - \frac{\pi R^2}{3} \frac{dh}{dt} = 0$$

$$-\frac{dh}{dt} = 2\frac{h}{R}\frac{dR}{dt} \qquad -\frac{dh}{dt} = -15 \text{ cm/s}.$$

7-19. $dP = 2RI \cdot dI$

$dP = 2 \cdot 100 \cdot 10^{-2} = 2$ vatios.

7-20. $I = \frac{E}{R + r} = 2$ amperios.

1.° $dI = -\frac{E}{(R + r)^2} dR \qquad dI = -80$ mA;

2.° $dV = R \cdot dI \qquad dV = 3{,}2$ V;

3.° $dP = 2RI \cdot dI \qquad dP = 12{,}8$ W.

7-21. 1.° $dC = \frac{S}{4\pi}\left(-\frac{de}{e^2}\right)$

$dC = -796$ cm

2.° $dW = \frac{1}{2} V^2 \cdot dC$.

Para obtener W en julios, se precisa expresar C en faradios:

$C = 7.960$ cm $= 7.960 \times 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ faradios

$dC = -796$ cm $= -796 \times 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ faradios

$dW = -4{,}81 \cdot 10^{-16}$ julios.

7-22. $dL = -\frac{4\pi N^2 S}{10^9 l^2} dl,$

$dL = -5$ mH.

7-23. $dZ = \frac{4\pi^2 L^2 F dF}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{40 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot 2}{\sqrt{10^8 + 9 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^2}}$

$dZ \approx 260\Omega$.

7-25. $dT = \pi \sqrt{\frac{L}{C}}\, dC$

$$dT = 3{,}14 \sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-9}}} \cdot 10 \cdot 10^{-12} = 3{,}14 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-11}$$

$$dT = 3{,}14 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

$$dT = 0{,}03\ 14\ \mu\text{s}.$$

7-26. 1.° $d(\operatorname{tg} \varphi) = 6{,}28,$

2.° $d(\operatorname{tg} \varphi) = -3{,}925.$

7-27. $dW = \frac{1}{2} \cdot 2mv \cdot dv = mv \cdot dv,$

$$dW = 500\ \text{J/s}.$$

CAPITULO VIII

CALCULO DE DIFERENCIALES

8-1. $\ln y = \frac{5}{2}\ln(x-1) + \frac{13}{2}\ln(x-3) - 8\ln(x-2),$

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{2}\cdot\frac{dx}{x-1} + \frac{13}{2}\cdot\frac{dx}{x-3} - 8\cdot\frac{dx}{x-2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$$

8-2. $$\frac{dy}{y} = \frac{3x^2+6}{x(x^2+3)}\,dx.$$

8-4. $\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2),$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{x\,dx}{x^2-a^2} - \frac{x\,dx}{x^2+a^2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2+2a^2}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}\cdot x\,dx.$$

8-5. $$\frac{dy}{y} = \frac{\ln x^2}{x}\,dx.$$

8-6. $\ln y = x\cdot\ln\frac{2}{x},$

$$\frac{dy}{y} = \ln 2\,\frac{dx}{x} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx,$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right]dx.$$

8-7. $\dfrac{dy}{y} = \left[n\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + m \cot x\right] dx.$

8-8. $\ln y = 3 \ln x + \dfrac{1}{2} \ln (1 + \ln x) - 4 \ln (1 + x),$

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \ln x} \cdot \frac{dx}{x} - 4\frac{dx}{1 + x},$$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{1}{x}\left(3 + \frac{1}{2 + 2 \ln x}\right) - \frac{4}{1 + x}\right] dx.$$

8-9. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}.$

8-11. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{5x^2 + 8}{(4 + x^2)(1 + x^2)} \cdot \dfrac{dx}{x}$

8-12. $\dfrac{dy}{y} = \left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{2x}{(3x^2 + 4)} - \dfrac{x}{x^2 - 4}\right] dx.$

8-13. $\ln y = (1 + x^2)^{1/2} \cdot \ln(1 + 2e^x),$

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{x \ln (1 + 2e^x)}{\sqrt{1 + x^2}} + 2e^x \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + 2e^x}\right] dx.$$

8-14. $\dfrac{dy}{y} = 2 \cos 3x \cdot \cot 2x - 3 \operatorname{sen} 3x \cdot \ln \operatorname{sen} 2x) 2\, dx.$

8-16. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{4x^4 - 20x^2 + 2}{x(4x^2 - 1)(x^2 - 3)} dx.$

8-17. $\ln y = \ln x \cdot 2 \ln (\operatorname{tg} x^2).$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \cdot 2 \ln (\operatorname{tg} x^2) + \frac{\ln x \cdot 2}{\operatorname{tg} x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x\, dx,$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{2 \ln \operatorname{tg} x^2}{x} + \frac{4x \ln x}{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x^2}\right) dx,$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x^2}{x} + \frac{4x \cdot \ln x}{\operatorname{sen} 2x^2}\right) 2\, dx.$$

8-18. $$\frac{dy}{y} = \left[\operatorname{sen} 2x \ln \left(\operatorname{arc\,cos}^2 \frac{1}{x} \right) + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2x \operatorname{arc\,cos}^2 \frac{1}{x} \sqrt{x^3 - x^2}} \right] dx.$$

8-20. $3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3ax\,dy - 3ay\,dx = 0,$

$dy(y^2 - ax) = dx(ay - x^2),$

$$dy = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\,dx.$$

8-21. $$dy = n \frac{\cos x}{\cos y} \cdot dx.$$

8-22. $$dy = \frac{x + y}{x - y}\,dx.$$

8-23. $4x^3\,dx - 6xy^2\,dx - 6x^2y\,dy + 4y^3\,dy = 0,$

$$dy = \frac{3xy^3 - 2x^3}{2y^3 - 3x^2y}.$$

8-24. $$2x \ln y\,dx + x^2 \frac{dy}{y} - 2y \ln x\,dy - y^2 \frac{dx}{x} = 0,$$

$$dy \left(\frac{x^2}{y} - 2y \ln x \right) = dx \left(\frac{y^2}{x} - 2x \ln y \right),$$

$$dy = \frac{y}{x} \cdot \frac{y^2 - 2x^2 \ln y}{x^2 - 2y^2 \ln x}.$$

8-25. $$dy = -\frac{x}{y} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 (x^2 + y^2)}{2 - \operatorname{sen}^2 (x^2 + y^2)}\,dx.$$

8-27. $2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos^2 y\,dx = \operatorname{sen}^2 x \cdot 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y\,dy,$

$dy = \cot x \cdot \cot y \cdot dx.$

8-28. $$dy = \frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{e^{x-y} - e^{x+y}}\,dx.$$

8-29. $$\cos \frac{y}{x} \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \right) - \operatorname{sen} \frac{x}{y} \left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \right) = 0,$$

$$dy \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + \frac{x}{y^3} \operatorname{sen} \frac{x}{y} \right) = dx \left(\frac{1}{y} \operatorname{sen} \frac{x}{y} + \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right),$$

$$dy = \frac{y}{x}\,dx.$$

8-30. $dy = \dfrac{dx}{\operatorname{tg} 2}$.

8-31. $dy = \dfrac{dx}{e^{x/y} - 1}$

8-32. $dy = \sqrt{\dfrac{1-y}{1-x}}\, dx$

8-33. Puede escribirse:

$$\ln \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = 2(x - y),$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2} \cdot \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 2\,dx - 2\,dy,$$

$$dy = \frac{y}{x} \cdot \frac{1-4x}{1-4y}\, dx.$$

8-35. Siendo menor de 1 el seno de un ángulo, sen $x/y < 1$, su logaritmo no puede ser igual a 1.

CAPITULO IX

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

9-1. $dy = (2x \ln x + x)\, dx,$

$d^2y = (2 \ln x + 2)\, dx^2$ es despreciable $d^2x^2,$

$d^3y = 2x^{-1}\, dx^3,$

$d^4y = -2x^{-2}\, dx^4,$

$d^5y = 4x^{-3}\, dx^5,$

...

$$d^{(n)}y = (-1)^{n-1} \cdot 2(n-3)!\, \frac{dx^n}{x^{n-2}}.$$

9-2. $dy = (-\operatorname{sen} x + 1 \operatorname{sen} 2x)\, dx,$

$d^2y = (-\cos x + 2 \cos 2x)\, dx^2,$

$d^3y = (\operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen} 2x)\, dx^3,$

$d^4y = (\cos x - 8 \cos 2x)\, dx^4,$

$d^5y = (-\operatorname{sen} x + 16 \operatorname{sen} 2x)\, dx^5,$

$$d^{(n)}y = \left\{ \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2^{n-1} \operatorname{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] \right\} dx^n.$$

9-3. $$d^{(n)}y = n!\, \frac{a^2 \cdot b^{2(n-1)}}{(a^2 - b^2 \cdot x)^{n+1}} \cdot dx^n.$$

9-4. $d^{(n)}y = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, x^{-n} \cdot dx^n,$

insistiendo en que

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

9-6. $dy = 2(1-x)^{-2}\,dx,$

$d^2y = 4(1-x)^{-3}\,dx^2,$

$d^3y = 12(1-x)^{-4}\,dx^3,$

$\cdots$

$$d^{(n)}y = \frac{2n!\,dx^n}{(1-x)^{n+1}}.$$

9-7. $d^{(n)}y = [a(x+n)+b]\,e^x \cdot dx^n.$

9-8. $$dy = 1 \cdot b \cdot \left(\frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a-bx}\right) dx,$$

$$d^2y = 1 \cdot b^2 \left[-\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a-bx)^2}\right] dx^2,$$

$$d^3y = 2b^3 \left[\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a-bx)^3}\right] dx^3,$$

$$d^4y = 6b^4 \left[-\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a-bx)^4}\right] dx^4,$$

$\cdots$

$$d^{(n)}y = (n-1)!\,b^n \left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(a+bx)^n} + \frac{1}{(a-bx)^n}\right] dx^n$$

9-9. $d^{(n)}y = (-1)^n(n+1)n!\,x^{-(n+2)}\,dx^n.$

9-10. $dy^{(n)} = e^x(n+x)\,dx^n.$

9-11. $dy = a \cdot \cos ax\,dx,$

$d^2y = -a^2 \operatorname{sen} ax\,dx^2,$

$d^3y = -a^3 \cos ax\,dx^3,$

$d^4y = +a^4 \operatorname{sen} ax\,dx^4,$

$d^5y = +a^5 \cos ax\,dx^5,$

$\cdots$

$$d^{(n)}y = a^n \operatorname{sen}\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

9-12. $$d^{(n)}y = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

9-14. $d^{(n)}y = (a^2 + b^2)^{n/2} \cdot e^{ax} \cos(bx + n\varphi)$

con:

$\varphi = \text{arc}\,(a + jb), \quad a = \rho \cos\varphi, \quad b = \rho \operatorname{sen}\varphi, \quad \rho = a + jb.$

En efecto, y puede escribirse:

$y = \text{Re}\, e^{(a+jb)x}$ con Re: parte real de la expresión.

9-15. $d^2y = 6(ax^2 + bx + c)(5a^2x^2 + 5abx + ac + b^2)dx^2.$

9-16. $dy = \ln x(2 + \ln x)\, dx,$

$$d^2y = \left(\frac{2 + \ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx^2,$$

$$d^2y = \frac{2}{x}(1 + \ln x)\, dx^2.$$

9-17. $d^2y = -x^{-3}(3 - 2 \ln x)\, dx^2.$

9-18. $d^2y = -4\,(1 - 4x^2)^{-3/2}\, dx^2.$

9-20. $$dy = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x\, dx,$$

$$d^2y = \frac{3}{2} \cos x\, dx^2.$$

9-21. $$d^2y = \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\left(\frac{8 \operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x} + \frac{18 \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}^2 3x} + \frac{9 \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x} - \frac{6}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 2x}\right) dx^2.$$

9-22. $d^2y = -(2 \operatorname{sen} x + \cos x)\, dx^2.$

9-23. $$dy = \left(\text{arc sen}\, x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx,$$

$$d^2y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}.$$

9-24. $d^2y = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)\, dx^2.$

9-25. $$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos 2x.$$ c.q.d.

9-26. $\dfrac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x,$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x,$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x \cos x - (x^2 - 2) \operatorname{sen} x.$ c.q.d.

9-27. $\dfrac{dy}{dx} = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x,$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6 \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x - 6 \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x - 4 \operatorname{sen}^3 x \cos x.$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6 \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x - 10 \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x.$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 64 \operatorname{sen}^4 x - 60 \operatorname{sen}^2 x + 6.$

9-28. $\dfrac{dy}{dx} = (1 - x^2)^{-1/2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1 - x^2)^{-3/2}.$ c.q.d.

9-29. Para calcular las diferenciales terceras escribiremos las derivadas, obteniendo a continuación la expresión de la diferencial.

$$y' = 6 \operatorname{tg} 3x (1 + \operatorname{tg}^2 3x),$$
$$y'' = 54 \operatorname{tg}^4 3x + 72 \operatorname{tg}^2 3x + 18,$$
$$y''' = 216 \operatorname{tg} 3x (3 \operatorname{tg}^4 3x + 5 \operatorname{tg}^2 3x + 2),$$
$$d^3y = (3 \operatorname{tg}^4 3x + 5 \operatorname{tg}^2 3x + 2)(216 \operatorname{tg} 3x) dx^3.$$

9-30. $d^3y = 2^5 \cdot x(65.525x^{12} - 68.250^{10} + 45.375x^8 - 15.750x^6 + \ldots + 3.633x^4 - 264x^2 + 15)\, dx^3.$

9-31. $d^3y = \dfrac{8 \cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}(3 \cot^2 x + 2) dx^3.$

9-32. $y' = -x^{-1},$

$y'' = x^{-2},$

$y''' = -2x^{-3},$

$d^3y = -2x^{-3}\, dx^3.$

9-34. $y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$

$$y'' = \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

$$d^3y = \frac{e^x\,(e^{4x} - 6e^{2x} + 1)}{(1 + e^{2x})^3}\,dx^3.$$

9-35. $d^3y = -\dfrac{1}{(1 - 4x^2)^{5/2}} \cdot 48x \cdot dx^3.$

9-37. $y'' = \dfrac{2 - \ln 1/x}{x^2\,(\ln 1/x)^3}.$

$$d^3y = \frac{2\,(\ln 1/x)(3 + \ln 1/x) + 6}{(\ln 1/x)^4}\,x^{-3}\,dx^3.$$

9-38. $3y^2y' - y - xy' = 0,$

$6yy'^2 + 3y^2y'' - y' - y' - xy'' = 0,$

$$y'' = -\frac{2xy}{(3y^2 - x)^3},$$

$$d^2y = -\frac{2xy}{(3y^2 - x)^3}\,dx^2.$$

9-40. $d^2y = \dfrac{2y'\,e^{xy} + (y + xy')^2\,e^{xy} - e^x - y'^2 \cdot e^y}{e^y - xe^{xy}}\,dx^2.$

9-41. $d^2y = 10\,\dfrac{x^2 + y^2}{(x - 2y)^3}\,dx^2.$

9-42. $d^2y = -\dfrac{16}{(y + 4)^3}\,dx^2.$

9-43. Puede escribirse:

$$y^2 + x^2 - 2xy = 0.$$

Sea: $(y - x)^2 = 0.$ Esto supone $y = x$

Por consiguiente $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$

9-44. $d^2y = -\dfrac{e^{x+y} + e^{2x}}{e^{2y}}\,dx^2.$

Que puede escribirse:

$$d^2y = -\frac{e^x\,(4 - e^x) + e^{2x}}{e^{2y}}\,dx^2$$

$$d^2y = -4e^{(x-2y)}dx^2.$$

9-45. $d^2y = -\dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen}^3 y}\, dx^2.$

También habría podido escribirse:

$$d^2y = -\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 y + \cos y \cdot \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 y}\, dx^2.$$

9-46. $d^2y = \dfrac{2xy - 3}{x^3}\, dx^2.$

9-47. Elevando al cuadrado:

$$x + y = e^{2x} \qquad y = e^{2x} - x,$$
$$y' = 2e^{2x} - 1,$$
$$y'' = 4e^{2x} = 4(x + y),$$
$$d^2y = 4(x + y)\, dx^2.$$

9-49. $x'_\theta = 2 \qquad x''_\theta = 0,$

$y'_\theta = \theta^2 \qquad y''_\theta = 2\theta,$

$$d^2y = \frac{4\theta - 0}{8}\, dx^2 = \frac{\theta}{2}\, dx^2.$$

9-50. $d^2y = \dfrac{2}{3}\,\theta^{-3}\, dx^2.$

9-51. $d^2y = \theta^{-1}\, dx^2.$

9-53. $x'_\theta = -a \operatorname{sen} \theta, \qquad x''_\theta = -a \cos \theta,$

$y'_\theta = \quad b \cos \theta, \qquad y''_\theta = -b \operatorname{sen} \theta,$

$$d^2y = \frac{ab \operatorname{sen}^2 \theta + ab \cos^2 \theta}{-a^3 \operatorname{sen}^3 \theta} = -\frac{b}{a^2 \operatorname{sen}^3 \theta}\, dx^2.$$

9-54. $d^2y = \dfrac{dx^2}{2 \cos^3 2\theta}.$

9-55. $d^2y = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{3a(\cos^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta)^2}\, dx^2.$

9-56. $d^2y = -\dfrac{1}{6}\, dx^2.$

9-57. $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

$$y'' = -\frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3}$$

$$y''' = -3\frac{b^6}{a^4}\cdot\frac{x}{y^5} = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

9-58. $y''' = \dfrac{27x}{8y^5} = \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

9-60. $x' = 3\operatorname{sen} 2\theta, \qquad x'' = 6\cos 2\theta,$

$y' = -6\operatorname{sen} 2\theta, \quad y'' = -12\cos 2\theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta + 36\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta}{27\operatorname{sen}^3 2\theta} = 0. \qquad \text{c.q.d.}$$

9-61. $x'_\theta = \theta^{-1} \qquad x''_\theta = -\theta^{-2}$

$y'_\theta = 1, \qquad y''_\theta = 0,$

$$\frac{dy}{dx} = \theta \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta^{-2}}{\theta^{-3}} = \theta \qquad \text{c.q.d.}$$

9-62. Si θ sobrepasa a π, x e y conservan el mismo valor: por consiguiente, el primer intervalo de variación está definido entre 0 y π.

Por otra parte, si θ se convierte en $-\theta$, x se convierte en $-x$ e y no altera; por consiguiente, el eje Oy es eje de simetría y basta estudiar la función desde 0 a $\pi/2$.

En un extremo, es preciso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = 0$$

$y'\theta = 4\operatorname{sen} 2\theta = 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

1.° para $\theta = 0$, $x \to \infty$,

$y = 0$: se tiene una asíntota horizontal;

2.° para $\theta = \pi/2$, $x = 0$, $y = 4$: extremo

$$x'_\theta = -\frac{4}{\operatorname{tg}^2\theta}(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = -\frac{4}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

si $\theta = \pi/2$, $x'\theta = -4 < 0$: el extremo es un máximo.

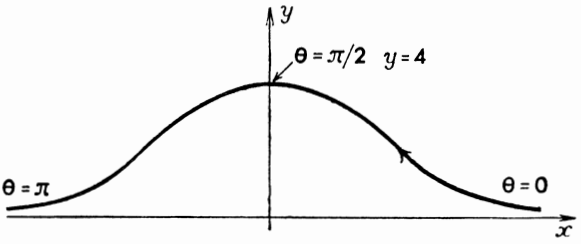


FIG. 9-62

9-64. $y' = \cos x \cdot y$

$y'' = y(\cos^2 x - \operatorname{sen} x)$

Por consiguiente: $y(\cos^2 x - \operatorname{sen} x) - y\cos^2 x + y \operatorname{sen} x = 0$ c.q.d.

9-65. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2} \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4a\operatorname{sen}^4\theta/2}.$

9-66. $y' = e^x(x+1) \qquad y'' = e^x(x+2)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$y^{(n)} = e^x(x+n) \qquad \dfrac{d^n y}{dx^n} = e^x(x+n).$

9-67. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 8 \operatorname{tg} x\,(3\operatorname{tg}^4 x + 5\operatorname{tg}^2 x + 2)$

$\dfrac{d^5y}{dx^5} = 8\,(15\operatorname{tg}^6 x + 30\operatorname{tg}^4 x + 17\operatorname{tg}^2 x + 2).$

En la segunda parte del cálculo:

$$y = \cot x = -\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + x\right)$$

$\dfrac{d^4y}{dx^4} = 8\cot x\,(3\cot^4 x + 5\cot^2 x + 2)$

$\dfrac{d^5y}{dx^5} = -8\,(15\cot^6 x + 30\cot^4 x + 17\cot^2 x + 2).$

9-68. $y'' = 2x\left(3\ln\dfrac{x}{a} + 1\right) + 3x$

$y''' = 2\left(3\ln\dfrac{x}{a} + 1\right) + 9$

$y'''' = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{a}{x} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{6}{x}$ c.q.d

CAPITULO X

OTRAS DIFERENCIALES

10-1. $y' = x^{-1}$

$$dl = (x^2 + 1)^{1/2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

10-2. $$dl = (1 + x^2)^{-2} \sqrt{(1 + x^2)^4 + 16(1 - x^2)^2}\, dx.$$

10-3. $$dl = \sqrt{\frac{2x^2 - 7}{x^2 - 7}}\, dx.$$

10-5. $y' = (1 + x^2)^{-1}$

$$dl = (1 + x^2)^{-1} \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}\, dx.$$

10-6. $$y' = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$dl = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^4 x}\, dx$$

o también:

$$dl = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2 x} \sqrt{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + 2}\, dx.$$

10-7. $$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$dl = \frac{1}{2} \sqrt{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}\, dx$$

$$dl = \frac{1}{2} \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\, dx = y$$

10-8. $y = u \cdot v \cdot z$

$f'_{(u)} = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{tg} 3x$

$f'_{(v)} = -2 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} 3x$

$f'_{(z)} = \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x}.$

$$df = \Big(\cos x \cdot \cos 2x \cdot \operatorname{tg} 3x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \frac{3 \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x}{\cos^2 3x}\Big)\, dx.$$

10-9. $$df(x) = \frac{3 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(1 - \cos^2 x)^{3/2} \cdot (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{1/2}} \cdot dx.$$

Será fácil comprobar estos resultados mediante el cálculo de la diferencial logarítmica.

10-10. $$df(x) = \frac{2}{e^{x^2}}\left(\frac{1}{x} - x \ln x^2\right) dx.$$

Comprobación

$\ln y = \ln \cdot \ln \cdot x^2 - \ln e^{x^2}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{\ln x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{2x}{e^{x^2}} = \frac{2}{x \ln x^2} - \frac{2x}{e^{x^2}}$$

$$dy = 2 \frac{\ln x^2}{e^{x^2}}\left(\frac{1}{x \ln x^2} - x\right)$$

$$dy = \frac{2}{x\, e^{x^2}} - \frac{2x \ln x^2}{e^{x^2}}.$$ c.q.d.

10-11. $df(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos^2 2x(1 - 8 \operatorname{sen}^2 x)\, dx.$

10-12. $$df(x) = 2\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}\right)^2\left(\frac{3}{\cos^2 2x} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\right) dx.$$

10-14. y es de la forma u^v.

$$f'_{(u)} = \frac{(\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x})^{(\sqrt{1-x}-1)}}{2\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x})^{(\sqrt{1-x})}}{2(1+x)}$$

$$f'_{(v)} = \frac{-(\sqrt{1+x})^{(\sqrt{1-x})} \cdot \ln \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}$$

$$df(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x})^{(\sqrt{1-x})}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{1+x} - \frac{\ln \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right) dx.$$

10-15. $df(x) = e^{-x}\,[\operatorname{sen} 2x(1-x) + 2x \cdot \cos 2x]\,dx.$

10-16. $$f'_{(u)} = \frac{1}{x} \ln x\,(\ln x)^{\ln x - 1} = \frac{1}{x}\,(\ln x)^{\ln x}$$

$$f'_{(v)} = \frac{1}{x}\,(\ln x)^{\ln x} \cdot \ln \cdot \ln x$$

$$df(x) = \frac{1}{x}\,(\ln x)^{\ln x}\,(1 + \ln \cdot \ln x)\,dx.$$

10-17. $$df(x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x}\,(3 \cos^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cdot \cot 3x - 1)\,dx.$$

10-19. $$y = (u - v)^z$$

$$f'_{(u)} = \frac{-x\,(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^{(-x-1)}}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f'_{(v)} = \frac{-x\,(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^{(-x-1)}}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'_{(z)} = (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^{-x} \cdot \ln\,(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(-1)$$

$$df(x) = -(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^{-x}\left[\frac{x}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}\right.$$

$$\left. + \frac{x}{2\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} + \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})\right]\,dx.$$

CAPITULO XI

DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

11-1. y puede escribirse:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}.$$

11-2. y puede escribirse:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} z$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

11-3. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z(1 + z^2)}{(1 + x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x(1 + x^2)}{(1 + x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

11-4. $$\frac{\partial y}{\partial x} = yz^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2zxy.$$

11-5. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{z^2 - x^2}} = -\frac{x}{z + \sqrt{z^2 - x^2} \cdot \sqrt{z^2 - x^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - x^2}} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}}\right).$$

11-7. $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{2z\sqrt{\frac{x}{z}}\left(1+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x}{2z^2\sqrt{\frac{x}{z}}\left(1+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2}.$$

11-8. $$\frac{\partial y}{\partial x} = x^{-1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -z^{-1}.$$

11-9. $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}\operatorname{sen}\frac{2z}{x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{2z}{x}.$$

11-10. $$\frac{\partial y}{\partial x} = bz + 2cx$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = bx + 2az.$$

11-11. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+z}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\sqrt{1+x}}{2(1+z)^{2/3}}.$$

11-12. $$\frac{\partial y}{\partial x} = 2e^{2x}\cdot\operatorname{sen} 3z$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 3e^{2x}\cos 3z.$$

11-13. $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2-z^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{(x^2-z^2)^2}$$

11-15. Basta añadir las dos diferenciales parciales calculadas en el problema **11-1.**

11-16. Comparar con el problema **11-2.**

11-17. $df = (1 + x^2 + z^2)^{-3/2}[(1 + z^2)z\,dx + (1 + x^2)x\,dz]$.

11-18. $df = xy(x\,dz + 2z\,dx)$.

11-19. $df = \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{2\sqrt{xz}}\right)dx + \left(-\dfrac{x}{z^2} + \dfrac{x}{2\sqrt{xz}}\right)dz$

$$df = \frac{1}{2z^2\sqrt{xz}}[(z^2 + 2\sqrt{xz})z\,dx + (z^2 - 2\sqrt{xz})x\,dz].$$

11-20. $df = [\cos(x + z) - \operatorname{sen}(x - z)]\,dx + [\cos(x + z) + \operatorname{sen}(x - z)]\,dz.$

11-21. $df = 2e^{(x^2+z^2)}(x\,dx + z\,dz)$.

11-23. $df = \ln z\,dx + \dfrac{x}{2}\,dz$.

11-24. $df = \dfrac{1}{z}\cot\dfrac{x}{z}\left(dx - \dfrac{x}{z}\,dz\right)$.

11-25. $df = \dfrac{(x + a)^n}{(z + b)^m}\left(\dfrac{n}{x + a}\,dx - \dfrac{m}{z + b}\,dz\right)$.

11-26. $df = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x - \sqrt{x} + z - \sqrt{z}}{(x + z)^2}\left(\dfrac{dx}{\sqrt{x}} - \dfrac{dz}{\sqrt{z}}\right)$.

11-27. $df = (a^x \cdot \ln a \cdot b^z + z\cos xz)\,dx + (a^x b^z \ln b + x\cos xz)\,dz$.

11-28. $df = [z\cos x - \operatorname{sen}(x - z)]\,dx + [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x - z)]\,dz$.

11-29. $df = \dfrac{2}{z}\operatorname{tg}\dfrac{x}{z}\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{z}\right)\left(dx - \dfrac{x}{z}\,dz\right)$.

11-31. $df = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}dx = -dx$.

11-32. $\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - z^2}}{x + \sqrt{x^2 - z^2}} \cdots$

$$\cdots\left[\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - z^2}\right)\left(\dfrac{-z}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right) - \left(x - \sqrt{x^2 - z^2}\right)\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right)}{(x - \sqrt{x^2 - z^2})^2}\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{2x}{z\sqrt{x^2 - z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2x}{z^2(x^2 - z^2)}\left[\sqrt{x^2 - z^2} + \frac{z(-z)}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right] = \frac{2x}{z^2} \cdot \frac{x^2 - 2z^2}{(x^2 - z^2)^{3/2}}$$

Se obtendrá también:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{x^2 - z^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(x^2 - z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{2z}{(x^2 - z^2)^{3/2}} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial z}.$$

11-33. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{zx}{\sqrt{1 + z^2x^2}} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{z}{(1 + z^2x^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{z^2\sqrt{1 + z^2x^2}}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2 + 3z^2x^2}{z^3(1 + z^2x^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{x}{(1 + z^2x^2)^{3/2}}.$$

11-34. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z}{z^2 + x^2}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2zx}{(z^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{x}{x^2 + z^2}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2zx}{(x^2 - z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

11-36. $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{e^x}{(e^x + e^z)^2}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{e^{2x} - e^{x+z}}{(e^x + e^z)^3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{e^z}{(e^x + e^z)^2} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{e^{2z} - e^{x+z}}{(e^x + e^z)^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = 2\frac{e^{x+z}}{(e^x + e^z)^3}.$$

11-37. $$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\frac{x^6 + z^6 + 7x^3z^3}{(x^3 - z^3)^3} \cdot 4.$$

11-38. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\operatorname{sen}(x-z) - (x+z)\cos(x-z)}{\operatorname{sen}^2(x-z)}$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\frac{(x+z)[1+\cos^2(x-z)]}{\operatorname{sen}^3(x-z)}.$$

11-39. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{(2z-x)(x-z)}}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{4z-3x}{4(x-z)^{3/2}(2z-x)^{3/2}}.$$

11-40. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{x}, \qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = 0.$

En efecto, y puede escribirse: $\ln x - \ln z$.

11-42. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = e^x \cdot \cos z.$

11-43. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \dfrac{2zx}{(x+z)^3}.$

11-44. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{2xz^3}{1+(x^2z^3)^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{6xz^2 - 6x^5z^8}{(1+x^4z^6)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{6xz^2(1-x^4z^6)}{(1+x^4z^6)^2}.$$

11-45. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \dfrac{e^{xz}}{\cos^3 e^{xz}}\left[\cos e^{xz} + zx\left(\cos e^{xz} + 2e^{xz} \cdot \operatorname{sen} e^{xz}\right)\right].$

11-47. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{z\sqrt{xz}}.$

11-48. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\dfrac{1}{z^2} \cdot e^{x/z}\left(1+\dfrac{x}{z}\right).$

11-49. Las dos segundas derivadas mixtas se escribirán:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = 2z - \frac{2}{x^2}\, e^{1/4}.$$

11-50. $$-\frac{z^2 + x^2 + xz}{(z + x)^{3/2} \cdot (z - x)^{5/2}}.$$

11-51. $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}(x + \sqrt{z^2 + x^2})}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = -\frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}}.$$

11-53. Resultado ya obtenido en el problema **11-48.**

11-54. $$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cos 2x \cdot \cos 3z,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -6 \cos 2x \cdot \operatorname{sen} 3z,$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -3 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3z.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = -6 \cos 2x \cdot \operatorname{sen} 3z$$ c.q.d.

11-55. $10z$.

11-56. $$-\frac{1}{4z\sqrt{xz}}.$$

11-57. $6 \cos 3z \cdot e^{2x}$.

11-58. Las dos segundas derivadas mixtas son nulas.

11-59. $$\frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = \frac{-z^2 + x^2 + 2z - 2x}{[x^2 + z^2 + 2(1 - z - x)]^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z}.$$

11-61. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2 + z^2)}$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}$,

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{z}{(x^2 + z^2)}$,

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \dfrac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}$,

La comprobación pedida es pues evidente.

11-62. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -2 \cos x \cdot \cos z.$

11-63. Problema resuelto en el número **11-34.**

11-64. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{1 - z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\dfrac{1}{(1 - z)^2}$,

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = +\dfrac{1 - x}{(1 - z)^2}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = +\dfrac{2(1 - x)}{(1 - z)^3}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = -\dfrac{1}{(1 - z)^2}$.

11-65. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\cos x}{\cos z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \operatorname{tg} z \cdot \dfrac{\cos x}{\cos z}$;

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = \operatorname{tg} z \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos z}(1 + 2 \operatorname{tg}^2 z)$.

11-67. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{2}{x}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = 0$;

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{3}{z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \dfrac{3}{z^2}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = 0.$

11-68. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{e^z \cdot \ln x}}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{e^z(1 + 2 \ln x)}{4x^2 (e^z \ln x)^{3/2}}$;

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{\ln x}{e^z}}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\ln x}{e^z}}$;

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = -\dfrac{1}{4x\sqrt{e^z \cdot \ln x}}$

11-69. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x/z}{\cos^2 x/z}$; $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}^2 x/z}{z^2 \cos^3 x/z}$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{x}{z^2} \frac{\operatorname{sen} x/z}{\cos^2 x/z}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{x}{z^2}\left(\frac{2 \operatorname{tg} x/z}{z \cos x/z} + \frac{x}{z^2} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x/z}{\cos^3 x/z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -\frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x/z + x(1 + \operatorname{sen}^2 x/z}{z^2 \cdot \cos^3 x/z}.$$

11-70. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = e^x$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^x$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -e^{-z}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = e^{-z}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = 0.$$

11-72. Puede partirse de las soluciones obtenidas en el ejercicio número **11-14.**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{z^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} x/z}{\cos^2 x/z},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = x\left(\operatorname{sen} 2\frac{x}{z} + \frac{2}{z^3 \cos^2 x/z}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{1}{z^2 \cdot \cos^2 x/z}\left(1 - 2\frac{x}{z} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{z}\right).$$

11-73. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = z^q \cdot p \cdot x^{p-1}$; $\dfrac{\partial y}{\partial z} = x^p \cdot q \cdot z^{q-1}$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = z^q \cdot x^p \cdot \ln x; \quad \frac{\partial y}{\partial q} = x^q \cdot z^q \cdot \ln z.$$

11-74. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{x^2 + 2zx - 2z^2}{(x+z)^2}$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-4x^2 - 2zx - z^2}{(x+z)^2},$$

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^3 - 2zx^2 - 4z^2x - z^3}{(x+z)^2} \equiv \frac{y(x+z)}{(x+z)^2}.$$

11-75. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 6xz + 4z^2$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -3x^2 + 8xz - 3z^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = -6x + 8z,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x} = -6x + 8z. \qquad \text{c.q.d.}$$

11-76. $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2 \cdot \partial z} = 24\,xz^3$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \cdot \partial x} = 36\,x^2z^2.$$

11-77. La expresión dada puede escribirse:

$$\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dz$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = x^2 + 2z + 2x$$

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} = 3x^2 + 4zx + 2x + 2z$$

... no se trata pues de una diferencial total exacta.

11-78. 99, tercer ejemplo.

11-79. $\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{2x(1-e^z)}{(1+x^2)^2}\right] = -\dfrac{2x\,e^z}{(1+x^2)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^z}{1+x^2}\right) = e^z\left[-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right]\cdot 2x = -\frac{2x\,e^z}{(1-x^2)^2}.$$

Se trata de una diferencial total exacta.

11-80. $\mathrm{A} = \dfrac{x+2z}{(x+z)^2} \qquad \mathrm{B} = \dfrac{z}{(x+z)^2},$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = -\frac{2z}{(x+z)^3}, \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} = -\frac{2z}{(x+z)^3}.$$

Se trata de una diferencial total exacta.

11-81. $\dfrac{\partial A}{\partial z} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 3z^2 - 2x.$

11-82. La función propuesta puede escribirse:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\, d(x^2 + z^2) + z\, dx - x\, dz}{x^2 + z^2} = d(\ln \sqrt{x^2+z^2}) + \frac{z\, dx - x\, dz}{x^2 + z^2}$$

$$y = d(\ln \sqrt{x^2 + z^2}) + d\left(\text{arc tg}\,\frac{x}{z}\right)$$

... es, por consiguiente, una diferencial total exacta.

11-84. $\dfrac{\partial A}{\partial z} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 1 = d(xz + \ln xz).$

11-85. $\dfrac{\partial A}{\partial z} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = -\operatorname{sen} x.$

11-86. $\dfrac{\partial A}{\partial z} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = -\dfrac{x}{z\sqrt{z^2 - x^2}}.$

11-87. $A = \dfrac{x + az}{(x - z)^3}, \qquad B = \dfrac{ax + z}{(x - z)^3},$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = a(x - z)^{-3} + 3(x + az)(x - z)^{-4}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = a(x - z)^{-3} - 3(z + az)(x - z)^{-4}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \text{para} \quad a = -1.$$

11-88. Respuesta: $a = +1.$

Utilizar el mismo sistema de cálculo que en el ejercicio anterior.

11-89. Primeramente es preciso tener:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2ab \operatorname{sen}(x - z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = +2ab \operatorname{sen}(x - z)$$

$$2ab \operatorname{sen}(x-z) = -2ab \operatorname{sen}(x-z) = 0,$$

$$2 \operatorname{sen}(x-z) = 0, \quad \text{sea} \quad \operatorname{sen} x \cos z = \operatorname{sen} z \cos x.$$

Sea: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ o $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} z, \quad z = x + k\pi,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2ab \cos(x-z) = -2ab(-1)^k.$$

En el cuadro siguiente se resumen los casos posibles.

1.º a y $b >$ o a y $b < 0$

k par: máximo, k impar: mínimo

2.º $a > 0$ y $b < 0$ o $a < 0$ y $b > 0$

k par: mínimo, k impar: máximo.

11-91. Respuestas:

$x = 0$, *ni* máximo, ni mínimo,

$x = +3$, mínimo,

$z = +3$, mínimo.

11-92. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$ para $x = \sqrt[3]{1/4}, \quad z = \frac{1}{2}\, 2^{1/3}$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 8 > 0$: mínimo.

11-93. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 2x - z = 0$ para $2x = z$

$\dfrac{\partial y}{\partial z} = 2z - x - 3 = 3x - 3 = 0$ para $x = +1.$

Para este valor $z = +2.$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = +2 > 0.$

Se trata, por consiguiente, de un mínimo.

11-94. Es preciso resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ z^2 - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$

11-95. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$ para $x^3 + z^2 + 6xz(x + z) = 0$,

y $(x + z)(x^2 + 5zx + z^2) = 0$.

1.° Para $x = -z = +\sqrt[3]{2/7}$
ni máximo, ni mínimo;

2.° $x^2 + 5zx + z^2 = 0$ para

$z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad x_1 = +0{,}5$

$z_2 = -1{,}4 \cdot 10^{-2}$ $\quad x_2 = +6{,}72 \cdot 10^{-2}$.

Son dos mínimos.

11-96. $x = z = 0$, ni máximo, ni mínimo.

$x = +a$, $\quad z = 0$, mínimo;

$x = -a, z = 0$, mínimo;

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 8a^2 > 0.$

11-97. $z = x = \pi/3$, máximo;

$z = x = \pi$, máximo.

11-98. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 3x(x - 2a) = \dfrac{\partial y}{\partial z} = -8az = 0$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6(x - a) = \mathrm{A}$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = 0 = \mathrm{B}$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -8a = \mathrm{C}.$

1.° $x = 0$, $\quad z = 0$, $\quad \mathrm{AC} > 0$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -6a$ $\quad \begin{cases} a > 0 & \text{máximo} \\ a < 0 & \text{mínimo} \end{cases}$

2.° $x = 2a$, $\quad z = 0$, $\quad \mathrm{AC} < 0$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6a$ $\quad \begin{cases} a > 0 & \text{mínimo} \\ a < 0 & \text{máximo} \end{cases}$

PROBLEMAS

11-99. $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$

$dS = \frac{1}{2} [b \operatorname{sen} \hat{A}\, da + a \operatorname{sen} \hat{A}\, db + ab \cos \hat{A}\, d\hat{A}).$

Ahora bien, $d\hat{A} = \frac{\pi}{180}$ radianes.

$dS = \frac{1}{2} \left(\frac{30}{2} + \frac{20}{2} + \frac{600}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3{,}14\right)$

$dS = 17 \text{ cm}^2$

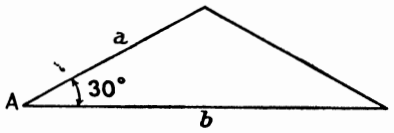


FIG. 11-99

11-100. $\frac{\partial y}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{1}{z}$

$\frac{\partial y}{\partial z} = f'\left(\frac{x}{z}\right)\left(-\frac{x}{z^2}\right)$

$x\frac{\partial y}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{x}{z}$

$z\frac{\partial y}{\partial z} = -f'\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{x}{z}$

Por consiguiente, la solución pedida está bien comprobada.

11-101. $\frac{dV}{dt} = 16{,}4 \text{ cm}^3/\text{seg.}$

11-102. $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ xyz = A \end{cases}$

$A = xy(18 - x - y)$. Aceptemos que x e $y \neq 0$.

$\frac{\partial A}{\partial x} = y(-y - 2x + 18) = 0, \qquad y = 18 - 2x,$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x(-x - 2y + 18) = 0, \qquad x = 6.$$

De donde: $x = 6, \quad y = 6, \quad z = 6.$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -2y = -12 < 0.$$

Se trata pues de un mámixo.

11-103. $A = x + y + z$

$K = xyz, \quad x$ e $y > 0 \neq 0$

$$A = y\left(1 + \frac{K}{y^2 z}\right) + z$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1 - \frac{K}{y^2 z} = 0, \qquad K = zy^2,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1 - \frac{K}{z^2 y} = 0, \qquad K = z^2 y,$$

Por consiguiente $y = z$.

Por otra parte

$$x = \frac{K}{yz} = \frac{zy^2}{y \cdot z} = y$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{2K}{z^4} > 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{x}{y \cdot z} \qquad AC - B^2 = \frac{3x^2}{y^2 z^2} > 0.$$

Se trata de un *mínimo* y no de un máximo.

11-104. Las soluciones posibles son:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \\ z = \frac{\pi}{6} + 2k''\pi \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k'\pi \\ z = \frac{\pi}{2} + k''\pi. \end{cases}$$

11-105. La base es un cuadrado.

11-107. $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = \hat{C} = \pi/2$, $\hat{D} = 60°$.

Se tiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R.$$

La superficie del triángulo ABC será

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{2R} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$S_1 = \frac{2R \operatorname{sen} \hat{A} \cdot 2R \operatorname{sen} \hat{B} \cdot 2R \operatorname{sen} (\hat{A} + \hat{B})}{4R}$$

$$= 2R^2 \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} (\hat{A} + \hat{B})$$

$$S_1 = 2R^2 \operatorname{sen} 120° \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} (x + 120°)$$

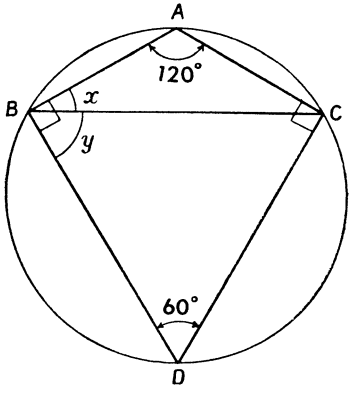


FIG. 11-107

Suponiendo que $\hat{B} = \hat{C} = \pi/2$, se tendrá:

$$S_1 = 2R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$S_2 = 2R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$\frac{S}{R^2\sqrt{3}} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + y\right)$$

$$\frac{1}{R^2\sqrt{3}} \frac{\partial S}{\partial x} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$$

$$\frac{1}{R^2\sqrt{3}} \frac{\partial S}{\partial y} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2y\right) = 0.$$

Por consiguiente: $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{3}$ y $x + y = \frac{\pi}{2}$.

el cálculo de $AC - B^2$ dará:

$AC - B^2 = 12R^4 > 0$. Pero $A = -2R^2\sqrt{3} < 0$.

Por consiguiente se trata de un máximo.

11-108. V_1 = Volumen del cilindro = $\pi R^2 h$

V_2 = Volumen de la esfera = $4/3\pi R^3$

$V = \pi R^2(h + 2/3\ R)$.

Ahora bien, la superficie de la base πR^2 es constante,

$dV = \pi R^2 \cdot dh$. Por consiguiente:

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$ c.q.d.

11-109. $di = -80$ mA.

11-111. $dR = -380\ \mu\Omega$

$$dR = \frac{\rho}{0{,}785}\left(\frac{dl}{l^2} - \frac{2l\,d \cdot dD}{d^4}\right)$$

$$dR = \frac{\rho}{0{,}785}\left(\frac{dl}{l^2} - \frac{2l \cdot dD}{d^3}\right)$$

$$dR = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-6}}{7{,}85 \cdot 10^{-1}}\left(10 - \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}}{1}\right) \approx -380 \cdot 10^{-6} \text{ ohmios.}$$

11-112. $dZ = +\ 12{,}74$ ohmios.

11-113. $d\lambda = \cdot \dfrac{1.885}{2}\left(\sqrt{\dfrac{C}{L}}\,dL + \sqrt{\dfrac{L}{C}}\,dC\right)$

$$d\lambda = 942{,}5\left[\sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{3}}}\cdot 10 + \sqrt{\frac{10^{3}}{10^{-3}}}\,(-2\cdot 10^{-5})\right]$$

$$d\lambda = 942{,}5\,(10^{-2} - 2\cdot 10^{-2}) = -9{,}425 \text{ metros.}$$

11-115. $dV = +\ 60\ \text{cm}^3$.

11-116. $dV = +\ 62{,}8\ \text{cm}^3$.

11-117. $dE = N(\Phi\, dn + n\, d\Phi)$

$$dE = 10^{3}\left(1 - \frac{10}{2}\right)$$

$$dE = -4\cdot 10^{3} \qquad \text{u. e. m.}$$

11-118. $d^2y = \dfrac{e^{x/z}}{z^2}\left[dx^2 - \left(1 + \dfrac{x}{z}\right) 2\,dx\cdot dz + \dfrac{x}{z}\left(2 + \dfrac{x}{z}\right) dz^2\right]$.

11-119. $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1}{z}\cdot \cos\dfrac{x}{z}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{z^2}\cdot \operatorname{sen}\frac{x}{z} = r$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\cdot \partial z} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{x}{z}\cdot \operatorname{sen}\frac{x}{z} - \cos\frac{x}{z}\right) = s$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}\cdot \cos\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{x}{z^2}\left(\frac{2}{z}\cos\frac{x}{z} - \frac{x}{z^2}\operatorname{sen}\frac{x}{z}\right) = t.$$

$$d^2y = r\,dx^2 + 2s\,dx\cdot dz + t\,dz^2.$$

$$d^2y = \frac{1}{z^2}\left[-\operatorname{sen}\frac{x}{z}\,dx^2 + 2\left(\frac{x}{z}\operatorname{sen}\frac{x}{z} - \cos\frac{x}{z}\right)dx\cdot dz \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + x\left(\frac{2}{z}\cos\frac{x}{z} - \frac{x}{z^2}\operatorname{sen}\frac{x}{z}\right)dz^2\right]$$

11-120. $r = -\dfrac{1}{x^2}, \qquad s = 0, \qquad t = \dfrac{1}{z^2},$

$$d^2y = \frac{dz^2}{z^2} - \frac{dx^2}{x^2}.$$

CAPITULO XII

CURVATURA Y RADIOS DE CURVATURA

12-1. $y' = -\dfrac{K^2}{x^2}, \qquad y'' = \dfrac{2K^2}{x^3}$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$R = \frac{1}{2K^2} \cdot \frac{(x^4 + K^4)^{3/2}}{x^3}$$

Observar que: $(x^4)^{3/2} = x^{12/2} = x^6$.

12-3. $R = \dfrac{1}{2a}[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}$.

12-4. y es una función implícita de x.

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$y'' = \frac{1}{3} y^{1/3} (x^{-4/3} + y^{-2/3} \cdot x^{-2/3})$$

$$R = \frac{3[1 + y^{2/3} \cdot x^{-2/3}]^{3/2}}{y^{1/3}(x^{-4/3} + y^{-2/3} \cdot x^{-2/3})} = \frac{3(x^{2/3} + y^{2/3})^{3/2}}{y^{1/3}(x^{-1/3} + y^{-2/3} \cdot x^{1/3})}$$

Esta última expresión se obtiene dividiendo por

$$(x^{2/3})^{3/2} = x.$$

Por consiguiente:

$$R = \frac{3a}{x^{-1/3} \cdot y^{1/3} + y^{-1/3} \cdot x^{1/3}} = 3a^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot y^{1/3}$$

$$R = 3\sqrt[3]{a \cdot x \cdot y}.$$

12-5. $R = \mp \dfrac{2}{\sqrt{a}}(x + a)^{3/2}$.

12-6. $R = \dfrac{(a^4 + 9x^4)^{3/2}}{6a^4x}$.

12-7. $R = \dfrac{\left[1 + \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 (ax)^{2/n}\right]^{3/2}}{\dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a^{1/n} \cdot x^{(1/n)-1}}$

12-8. $y' = 1 - x^{-1/2}$

$y'' = \frac{1}{2} x^{-3/2}$

$R = 2\left[1 + x\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^{3/2}$.

Si $x = 0$, $R = 2$.

12-9. $R = \mp \dfrac{73^{3/2}}{100} \mp 6{,}2$

12-10. $R = -2{,}635$.

12-11. $R_{\pi/4} = \infty$.

Hay un punto de inflexión.

12-12. $R = -\dfrac{(2)^{3/2}}{2} = -\sqrt{2}$.

12-13. $y' = \dfrac{a^3}{2yx^2}$.

Se supone que $a \neq 0$, pues de lo contrario y no tendría sentido.

Por consiguiente $y' \neq 0$: no hay mínimo.

12-14. $y' = 4x^3 - 12x^2 - 36x$, $y'(0) = 0$

$y'' = 12x^2 - 24x - 36$, $y''(0) = -36$

$R = \dfrac{1}{y''} = -\dfrac{1}{36}$

12-15. $R = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

$\rho' = a$, $\rho'' = 0$, $R = \dfrac{a(\omega^2 + 1)^{3/2}}{\omega^2 + 2}$.

12-16. $\rho = \rho' = \rho''$,

$$R = \frac{(2\rho^2)^{3/2}}{2\rho^2} = \rho\sqrt{2}.$$

$$R = a\, e^{\omega}\sqrt{2}.$$

12-17. $R = a\, e^{m\theta}(1 + m^2)^{1/2}$.

12-19. $$2\rho\rho' = -2a^2 \operatorname{sen} 2\omega,$$
$$2\rho'^2 + 2\rho\rho'' = -4a^2 \cos 2\omega.$$

De donde se obtiene:

$$\rho' = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\omega}{\rho} \quad \text{y} \quad \rho\rho'' = -2a^2 \cos 2\omega - \rho'^2$$

$$R = \frac{a^3}{\rho^3} \cdot \frac{(\rho^2 \cos 2\omega + a^2 \operatorname{sen}^2 2\omega)^{3/2}}{3a^4} \cdot a^2 \cos 2\omega,$$

$$R = \frac{a \cos 2\omega}{3\rho^3}(\rho^2 \cos 2\omega + a^2 \operatorname{sen}^2 2\omega)^{3/2}.$$

Ahora bien, $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$,

$$R = \frac{a^2}{3\rho}, \quad \text{ya que} \quad \operatorname{sen}^2 2\omega = 1 - \cos^2 2\omega = 1 - \frac{\rho^4}{a^4}.$$

12-20. $R = \frac{2}{3}\sqrt{\rho a}$.

12-21. $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{\rho}$.

12-22. $\rho' = 2a \cdot \cos 2\theta$,

$\rho'' = -4a \cdot \operatorname{sen} 2\theta$,

$$R = a\frac{(1 + 3\cos^2 2\theta)^{3/2}}{5 + 3\cos^2 2\theta}.$$

12-23. $$R = \frac{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{3/2}}{a^2 + 2b^2 + 3ab\cos\theta}.$$

12-24. $R = -2a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$.

12-25. $R = \dfrac{(16+3)^{3/2}}{26}$ $\quad R = 3{,}175.$

12-26. $\rho' = \rho \operatorname{tg} 2\theta,$

$$\rho'' = \operatorname{tg}^2 2\theta + \frac{2\rho}{\cos^2 2\theta},$$

$$R = \frac{-\rho^3\left(\dfrac{1}{\cos^2 2\theta}\right)^{3/2}}{\rho^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 2\theta}\right)} = -\frac{\rho}{\cos 2\theta} = -\frac{a}{(\cos 2\theta)^{3/2}}$$

12-27. $R = 1/y''$, con $y' = 0$ e $y'' > 0$,
$y' = \ln x + 1 = 0$ para $\ln x = 1$ $\quad x = 0{,}366$,
$y'' = 1/x > 0$ para $x = 0{,}366$. (Valor de x que engloba y').
Respuesta: $x = 0{,}366 = R = e^{-1}$.

12-28. $R = 1/y'' = 2$, $\quad y'' = 0{,}5 > 0.$

12-29. $y' = 0$ para $x = 0$ y $x = +2$,
$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$,
$y'' > 0$ únicamente para $x = 0$, $\quad y'' = +2$,
$R = 1/y'' = 0{,}5.$

12-31. $R = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}.$

12-32. $R = e = 2{,}71.$

12-33. Las coordenadas del centro de curvatura son:

$$\begin{cases} x_c = x - y'/y''(1+y'^2) \\ y_c = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

$$y' = 1/x, \qquad y'(1) = 1,$$
$$y'' = -1/x^2, \qquad y''(1) = -1,$$
$$y(1) = 0.$$

De donde:

$$\begin{cases} x_c = +3, \\ y_c = -2. \end{cases}$$

12-34. $\begin{cases} x_c = 2/\sqrt{3}, \\ y_c = -2 + \sqrt{3}. \end{cases}$

12-35. $R = \infty$: punto de inflexión.

12-36. 1.° Para $x = 0$ $\begin{cases} x_c = +4, \\ y_c = 0. \end{cases}$

2.° Para $x = 2$ $\begin{cases} x_c = +10, \\ y_c = \pm 4. \end{cases}$

12-38. $x_c = 2 - \frac{1}{2}(1 + 36) = -16{,}5,$

$$y_c = \frac{1 + 36}{12} = 3{,}08.$$

12-39. $y^3 - 8y + 8 = 0,$

$(y - 2)(y^2 + 2y - 4) = 0.$

Se verifica para:

$$y_1 = +2; \quad y_2 = +1{,}235; \quad y_3 = -3{,}235,$$

$$y' = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$$

$$y_1' = -1; \quad y_2' = +2; \quad y_3' = -1{,}06,$$

$$y'' = \frac{6x + 6yy'^2 - 8y'}{4x - 3y^2}$$

$$y_1'' = -8; \quad y_2'' = +7{,}4; \quad y_3'' = -0{,}025.$$

Respuestas:

1.° para $y_1 = +2$ $\begin{cases} x_c = +1{,}75, \\ y_c = +1{,}75. \end{cases}$

2.° para $y_2 = +1{,}235$ $\begin{cases} x_c = +0{,}65, \\ y_c = +1{,}91. \end{cases}$

3.° para $y_3 = -3{,}235$ $\begin{cases} x_c = +2, \\ y_c = -87{,}88. \end{cases}$

12-40. $\begin{cases} x_c = 2. \\ y_c = 5. \end{cases}$

12-41. Considerar los cálculos del número **12-39.**

12-42. $2yy' - 4y' - 4 = 0, \quad y' = \dfrac{2}{y-2} \qquad y'(0) = -1,$

$2y'^2 + 2yy'' - 4y'' = 0,$

$y'' = -\dfrac{y'^2}{y-2}, \qquad y''(0) = \dfrac{1}{2},$

$R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = 4\sqrt{2}.$

12-43. $R = -2a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}.$

Para la ordenada máxima, $y' = 0$ e $y'' < 0$.

$$y' = 0 \quad \text{para} \quad \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \text{sea } \theta \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$y'' = -\frac{1}{a(1 - \cos\theta)^2},$$

para $\theta = 0, \qquad y'' = \infty;$

para $\theta = \pi, \qquad y'' = -1/4a < 0.$

Por consiguiente $\qquad R = -4a.$

12-44. $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{y''^2}[3y'y'' - y'''(1 + y'^2)].$$

Es preciso que $\dfrac{dR}{dx} = 0, \quad$ sea $\quad y''' = \dfrac{3y'y''}{1 + y'^2}.$

12-45. $R = \dfrac{(5x^4 - 12x^2 + 3)^{3/2}}{6x^3}$

$$R' = \frac{(5x^4 - 12x^2 + 3)^{1/2}}{2x^4}(5x^4 - 9) = 0.$$

Esto no es posible más que para

$$5x^4 = 9, \qquad x = \pm 1{,}16.$$

Para $\qquad x = +1{,}16, \qquad y'' > 0$: radio mínimo.

Para $\qquad x = -1{,}16, \qquad y'' < 0$: radio máximo.

12-46. El mínimo del radio de curvatura se obtiene para:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

12-48. $R = \dfrac{-x^2(1+x^2)^{3/2}}{x^3} = -\dfrac{(1+x^2)^{3/2}}{x}$,

$R_x' = (1-2x^2)\dfrac{(1+x^2)^{1/2}}{x^2}$

$R_x' = 0$ para $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

x	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
R'_x		$+$	0	$-$	
R	$-\infty$	↗	$-3/2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

El signo «menos» no interesa, ya que x debe ser positivo:

$$R_x' = 0 \quad \text{para} \quad x = +1/\sqrt{2},$$
$$R = -3/2\sqrt{3}.$$

Nota. — Si se traza la curva y, se comprueba que para $x = 0$ y $x = +\infty$, $R = -\infty$. Por consiguiente, en *valor absoluto*, el radio de curvatura mínimo se obtiene para $x = 0{,}7$.

12-49. $y' = 2ax + b$,

$y'' = 2a$,

$R = \dfrac{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}{2a} = \dfrac{(1+K)^{3/2}}{2a}$

R será mínimo si $K = 0$, sea: $x = -b/2a$.

Se trata de la abscisa del máximo de la curva.

12-50. Para $x = 1$, $R_1 = 5{,}34$.

Para $x = 0$, $R_0 = \infty$.

12-51. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$, $y'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$y'' = \dfrac{1}{(2x+3)^{3/2}}$, $y''(0) = -\dfrac{1}{3^{3/2}}$,

$R = -8$.

12-52. $R = \pm 24{,}75$.

12-54. $y' = 4x(4x^2 - 1)$,
$y' = 0$ para $x = 0$ y $x = \pm 1/2$,
$y'' = 48x^2 - 4$.
Para $x = 0$, $y'' = -4$; para $x = \pm 1/2$, $y'' = +8$.

Respuestas:

$x = -1/2$,	$R = 1/8$:	mínimo de y,
$x = 0$,	$R = -1/4$:	máximo de y,
$x = +1/2$,	$R = 1/8$:	mínimo de y.

12-55. Para $LC\omega^2 = 1$,

$$y' = 2L/R \quad \text{e} \quad y'' = -\frac{2L}{R}\sqrt{LC}$$

$$R = -\frac{R}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 + \frac{4L^2}{R^2}\right)^{3/2}$$

12-56. $y' = (1 + 4x^2)^{-3/2}$, $y'(0) = 1$,
$y'' = -12x(1 + 4x^2)^{-5/2}$, $y''(0) = 0$.
$R = 1/0 = \infty$:
es un punto de inflexión.

12-57. $R = -6$ ya que $y'' = -\dfrac{1 + t^2}{12}$.

12-58. $x_t' = -3a \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t$,
$y_t' = 3a \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$,
$x_t'' = -3a \cos t(1 - 3 \operatorname{sen}^2 t)$,
$y_t'' = 3a \operatorname{sen} t(2 - 3 \operatorname{sen}^2 t)$,
$y_x' = -\operatorname{tg} t$,

$$y_x'' = \frac{1}{3a \cos^4 t \cdot \operatorname{sen} t}.$$

$$R = (1 \operatorname{tg}^2 t)^{3/2} \cdot 3a \cos^4 t \cdot \operatorname{sen} t,$$

$$R = \frac{3a \cos^4 t \cdot \operatorname{sen} t}{\cos^3 t} = 3a \cos t \operatorname{sen} t.$$

Si $t = t_1$, $R = 3a \cos t_1 \operatorname{sen} t_1$. c.q.d.

TOMO III

CALCULO INTEGRAL Y PRIMERAS APLICACIONES

CAPITULO II

INTEGRACION POR SUSTITUCION

2-1. Pongamos: $1 + x = u$, $x = u - 1$, por consiguiente $dx = du$. Denominaremos siempre I a la integral propuesta. Entonces, I puede escribirse:

$$I = \int \frac{(u-1)\,du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{u}} - \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$I = \int u^{1/2}\,du - \int u^{-1/2}\,du$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} - 2\sqrt{u} = 2u^{1/2}\left(\frac{u}{3} - 1\right)$$

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x-2) + C.$$

2-2. Poniendo $1 + x = u^2$ se obtendrá

$$I = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1+x} + C.$$

2-3. $I = 2\sqrt{x-1} + C.$

Evidentemente es preciso que $x - 1 > 0$.

2-4. Aquí poner $\sqrt{x} = u$ de donde: $x = u^2$.

Por otra parte:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}, \qquad A = B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{du}{1+u} + \int \frac{du}{1-u} = \ln \left| K \cdot \frac{1+u}{1-u} \right|$$

$$I = \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot K \right|.$$

2-5. Se pondrá: $u = \sqrt{x-1}$.

A continuación: $v = u^2 + u + 1$.

Ahora bien $u^2 + u + 1 = (u + \frac{1}{2})^2 + 3/4$

$$I = \ln v - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(2u + \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$I = \ln | x + \sqrt{x-1} | - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

2-6. $$I = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right| + 2\sqrt{x} + C.$$

Comprobación:

$$I' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(2 - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}.$$

2-8. Pongamos $x = \operatorname{tg} \varphi$, por consiguiente $\varphi = \operatorname{arc\,tg} x$

$$dx = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi$$

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = \int \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi} = \int \frac{(1 - \cos^2 \varphi)}{\cos \varphi} d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \int \cos \varphi \, d\varphi$$

habiéndose estudiado la primera en el número 36 del curso, se tendrá:

$$I = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} \right) - \operatorname{sen} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Ahora bien $\operatorname{sen} \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Por otra parte:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} \right)}$$

y $$\operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} \right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

Finalmente, I puede también escribirse:

$$I = \ln \left| \frac{x - 1 \pm \sqrt{1 + x^2}}{x + 1 \mp \sqrt{1 + x^2}} \right| - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$$

2-9. Poner $x = \operatorname{sen} \varphi$,
A continuación $t = \operatorname{tg} \varphi$.

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

2-10. $I = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$

2-11. $I = \dfrac{1}{9}(2x^3 + 9)^{3/2} + C.$

2-12. Poner: $5 - 4x^2 = u, \qquad x\,dx = -\dfrac{du}{8},$

$$I = \ln |(5 - 4x^2)^{-3/8} \cdot C|.$$

2-13. $I = (3x + 5)^{3/2}\left(\dfrac{6x}{45} - \dfrac{4}{27}\right) + C.$

2-14. Después de haber puesto $x = 1/u$, se tiene:

$$I = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2u^2 + 1}}; \quad \text{pongamos entonces: } a^2u^2 + 1 = v:$$

$$I = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{v} + C$$

$$I = -\frac{1}{a^2x}\sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

2-15. $I = -\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{(x^3 + 2)^2} + C.$

2-16. Poner: $x^3 + 2 = u, \qquad$ por consiguiente $x^2\,dx = \dfrac{du}{3}.$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{1/4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/4}}{3/4} = \frac{4}{9}u^{3/4} + C.$$

$$I = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3 + 2)^3} + C.$$

2-17. $I = \frac{3}{4}(x^2 + 6x)^{2/3} + C.$

2-18. Poner: $1 - 2x^2 = u.$

$$I = -\frac{1}{6}\sqrt{(1 - 2x^2)^3} + C.$$

En efecto:

$$I = -\frac{1}{4}\int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\, du$$

$$I = -\frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{6}\, u^{3/2} + C.$$

2-19. Pongamos $3 \cos 2x = u$, de donde:

$$\operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{du}{6}$$

$$I = -\frac{1}{6}\int e^u\, du = -\frac{1}{6}e^u + C$$

$$I = -\frac{1}{6}e^{3 \cos 2x} + C.$$

2-20. $I = x + \ln|x + 1| + K.$

2-21. Si se pone $e^x = u$, $\quad e^x\, dx = du,$

$$I = \int \cos \cdot u \cdot du = \operatorname{sen} u + C.$$

$$I = \operatorname{sen} e^x + C.$$

2-22. $I = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen} x^3 + C.$

2-24. La integral propuesta puede escribirse:

$$I = \int \frac{2x}{x^2 + 9}\, dx - 7\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{du}{u} - \frac{7}{3}\int \frac{dx/3}{1 + (x/3)^2}$$

$$I = \ln(x^2 + 9) - \frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C.$$

2-25. $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4.$

Se pondrá: $x - 2 = u$ ya que $u^2 + 4 = v.$

$$I = \ln(\sqrt{x^2 - 4x + 8}) + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - 2}{2} + C.$$

2-26. $2x^2 + 2x + 5 = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$.

Pongamos $x + 1/2 = u$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 9/4} = \frac{1}{2}\int \frac{4 \cdot (du/9)}{4u^2/9 + 1} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{3} + C$$

$$I = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C.$$

2-27. Poner sucesivamente:

$x - 2/3 = u$ y $u^2 + 4/9 = v$.

$$I = \ln\left|\left(\frac{9x^2 - 12x + 8}{9}\right|\right)^{1/9} - \frac{5}{18}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3x-2}{2}\right) + C.$$

2-28. Pongamos $4x - x^2 = u$.

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C_1, \quad I_1 = -\sqrt{4x - x^2} + C_1$$

$$y \quad -x^2 + 4x = -1[(x-2)^2 - 4].$$

Se aplicará el método dado en el curso número 22, con $a < 0$:

$$I_2 = 4 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C_2.$$

$$I = -\sqrt{4x - x^2} + 4 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

2-29. $I = 2x^{1/2} + 4x^{1/4} + 4 \ln|(x^{1/4} - 1)| + C.$

2-31. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \int \frac{-u\,du}{u^2\sqrt{\frac{3}{u^2} + \frac{2}{u} - 1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 2u + 3}}$$

Ahora bien, $-u^2 + 2u + 3 = 4 - (u-1)^2$.

$$I = -\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1-x}{2x}\right) + C.$$

2-32. $I = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2} \cdot (3x^3+2) + C.$

2-33. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}}}{1/u^4}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int \sqrt{u-1} \cdot u\, du.$$

Pongamos entonces $u - 1 = v^2$, $\quad u = v^2 + 1,$

$$du = 2v\, dv,\ v = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/2};$$

$$I = -2\int v^2(v^2+1)\, dv = -2\int v^4\, dv - 2\int v^2\, dv$$

$$I = -\frac{2v^5}{5} - \frac{2v^3}{3} + C$$

$$I = -\frac{2}{15}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) + C.$$

2-34. Se llega a $I = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$.

Cálculo hecho en el número 38 del Curso.

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

2-35. Poniendo $x = 1/u$, se obtiene:

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{-u^2 - 4u + 4}}$$

Ahora bien $\quad -u^2 - 4u + 4 = 8 - (u+2)^2.$

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{8-(u+2)^2}} \quad \text{de la forma} \quad -\int \frac{dv}{\sqrt{K^2 - v^2}}$$

con $\qquad v = u + 2 \quad$ y $\quad K = 2\sqrt{2}$

$$I = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u+2}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

$$I = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1+2x}{2x\sqrt{2}}\right) + C.$$

2-36. Sumando y restando $2a$ al numerador se obtiene:

$$I = \int \frac{2x + 2a - 3 - 2a}{x^2 + 2ax + 3a^2}\,dx. \qquad \text{Se pondrá: } u = x^2 + 2ax + 3a^2$$

$$I = \int \frac{du}{u} - (2a + 3)\int \frac{dx}{(x + a)^2 + 2a^2}$$

$$I = \ln |(x^2 + 2ax + 3a^2)| - \frac{3 + 2a}{a\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{x + a}{a\sqrt{2}} + C.$$

2-37. $I = -\dfrac{1}{2ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{ab}{x^2}\right) + C.$

2-38. $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

2-39. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \frac{1}{K} \int \frac{du}{\operatorname{sen} u}$$

$$\text{con} \quad K = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad u = \alpha + x;$$

$$I = \frac{1}{K} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} b/a + x}{2}\right) \right| + C.$$

Nota. — Podrá compararse este resultado con el que se da en el curso número 36, en el estudio del *Caso particular*. Estos dos resultados son idénticos.

2-41. $I = \dfrac{1}{45}(1 + 2x^3)^{3/2} \cdot (3x^3 - 1) + C.$

2-42. Se pondrá $x - 3 = u$.

$$I = \int \frac{(u + 3)^4 + 3(u + 3)^2 - 5}{u^3}\,du.$$

Entonces se desarrollan los binomios

$$I = \frac{(x - 3)^2}{2} + 12(x - 3) + 57 \ln (x - 3) - \frac{126}{x - 3} - \frac{103}{2(x - 3)^2} + C.$$

2-43. $I = \ln (1 + x^{2/3})^{3/2} + C.$

2-44. $I = 3/4(1 + x^2)^{4/3} + C.$

2-45. Poniendo $b - x = u$:

$$I = au^{-5} + C,$$

$$I = \frac{a}{(b-x)^5} + C.$$

2-46. $I = \operatorname{sen}(\ln|x|) + C.$

2-47. $I = \operatorname{arc\,sen}(\ln|x|) + C.$

2-48. Poner:

$$\cos 2\theta = u, \quad \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = -\frac{du}{2}$$

$$I = -\frac{1}{2}\int u^3\, du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} + C$$

$$I = -1/8\,(\cos 2\theta)^4 + C.$$

2-49. Poner:

$$\ln|x| = u; \quad I = \int u^3\, du$$

$$I = 1/4\,(\ln|x|)^4 + C.$$

2-50. $I = -\frac{2}{15}\sqrt{1-x}(3x^2 + 4x + 8) + C.$

2-51. La integral propuesta se convierte en:

$$I = \operatorname{tg} u + C = \operatorname{tg}\operatorname{arc\,sen} x + C = \operatorname{tg}\varphi;$$

$\varphi = \operatorname{arc\,sen} x$, por consiguiente $x = \operatorname{sen}\varphi$;

$$I = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}C;$$

$$I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

2-52. $I = \ln(x^2 + 1)^{1/2} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4(x^2+1)^2} + C.$

2-53. Puede escribirse:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Pongamos $x^2 + 2x = u$; $x\,dx = \dfrac{du - 2\,dx}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \int \frac{dx}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$I = \sqrt{u} + C,$$

$$I = \sqrt{x^2 + 2x} + C.$$

2-54. Poniendo $\sqrt{x} = u, \quad dx = 2u\,du.$

A continuación $2 + u = v, \quad du = dv$

$$I = \ln \cdot C(2 + \sqrt{x})^2.$$

2-55. $I = \ln |\, C(1 + \ln |\, x\,|)\,|.$

2-56. Poner $1 + x^{3/2} = u.$

De donde: $x^{1/2}\,dx = 2/3\,du$

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln |\, u\,| + C,$$

$$I = \ln |\, C(1 + x^{3/2})^{2/3}\,|.$$

2-57. $I = -4 \operatorname{sen} x + \dfrac{9}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

2-58. $I = \dfrac{1}{15}(4 + x^2)^{3/2}(3x^2 - 8) + C.$

2-59. Haciendo el primer cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \frac{1}{5}\int_u \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + 1}}. \quad \text{Se pone entonces } u = 1/z,$$

$$I = -\frac{1}{5}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}}. \quad \text{Ahora bien: } z^2 + z + 1 = (z + \tfrac{1}{2})^2 + 3/4,$$

$$I = -\frac{1}{5}\ln\left|\left[\left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^5} + 1}\right]\right| + C.$$

2-60. Se multiplicará numerador y denominador por la cantidad conjugada del denominador, y después se pondrá $1 + x^2 = u$.

$$I = x + 2/3\,x^3 - 2/3(1 + x^2)^{3/2} + C.$$

2-61. Poniendo $x\sqrt{2} = \sec\varphi$, se obtiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \operatorname{cosec}\varphi\, d\varphi$$

Ahora bien: $\operatorname{cosec}^2\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{cosec} 2\varphi + 1)$, de donde

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\varphi + \frac{\sec 2\varphi}{2}\right).$$

Ahora bien: $\sec 2\varphi = 2\sec\varphi \cdot \operatorname{cosec}\varphi = 2x\sqrt{2}\sqrt{1-2x^2}$.

Y $\varphi = \ln(x\sqrt{2} + \sqrt{1+2x^2})$: Curso núm. 61, tercer ejemplo.

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|x\sqrt{2} + \sqrt{1+2x^2}| + C.$$

2-62. $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

2-63. Ver el Curso, núm. 45, ejemplo 13.

2-64. *Poner* $x = 3/2 \operatorname{sen} u, \quad dx = 3/2 \cos u\, du.$

$$I = 3\int \frac{\cos^2 u\, du}{\operatorname{sen} u} = 3\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 u)}{\operatorname{sen} u}\, du = 3\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} - 3\int \operatorname{sen} u\, du,$$

$$I = 3\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + 3\cos u.$$

Ahora bien: $\cos \operatorname{arc\,sen}\frac{2x}{3} = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$,

$$I = 3\ln\left|\operatorname{tg}\cdot\frac{\operatorname{arc\,sen} 2x/3}{2}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C.$$

2-66. $I = \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) - \frac{\sqrt{2x-x^2}(x+3)}{2} + C.$

2-67. Haciendo el cambio de variable indicado se obtiene:

$$I = \int \operatorname{sen}^4\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi.$$

Ultimo ejemplo, núm. 39 del Curso.

2-68. Se escribirá:

$$I = \int \sec^2 x \cdot \sec x \cdot dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\sec x \cdot dx$$

$$I = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \sec x\, dx - \int \sec x\, dx.$$

Poner: $\operatorname{cosec} x = u.$

$$I = \operatorname{cosec} x\left(\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{3} - 1\right) + C.$$

CAPITULO V

INTEGRACION POR PARTES

5-1. Poner: $x \cdot \operatorname{sen} x = u, \qquad du = (\operatorname{sen} x + x \cos x)\, dx$

$\cos x\, dx = dv, \qquad v = \operatorname{sen} x.$

$$I = uv - \int v\, du$$

$$I = x \operatorname{sen}^2 x - \int \operatorname{sen} x\, (\operatorname{sen} x + x \cos x)\, dx$$

$$2I = x \operatorname{sen}^2 x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

Ahora bien: $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

$$I = \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2x + C.$$

5-2. $\displaystyle I = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$

5-4. Ponemos: $\displaystyle \operatorname{cosec} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

$$I = \tfrac{1}{2}\int (e^x + e^{-x}) \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\int e^x \cdot \cos x\, dx + \tfrac{1}{2}\int e^{-x} \cdot \cos x\, dx$$

I_1 : ponemos $e^x = u, \qquad du = e^x \cdot dx$

y $\cos x\, dx = dv, \qquad v = \operatorname{sen} x.$

$$I_1 = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x\, dx.$$

Ponemos: $e^x = u, \quad du = e^x\,dx$

$$\operatorname{sen} x\,dx = dv, \quad v = -\cos x.$$

$$I_1 = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cdot \cos x - \int -e^x \cos x\,dx \right]$$

$$2I_1 = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x}{4}(\operatorname{sen} x + \cos x) + I_2.$$

Para I_2 se hará un cálculo análogo. Finalmente, se obtendrá:

$$I = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^{-x} \operatorname{sen} x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x}{4} + C$$

$$I = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosec} x + \tfrac{1}{2} \cos x \cdot \sec x + C.$$

5-5. Se desarrollará siguiendo los mismos cálculos que en el ejercicio anterior.
Se pondrá:

$$\sec x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

5-6. $I = \dfrac{e^x}{5}(\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos 2x) + C.$

5-7. Poner

$$\ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$x^n\,dx = dv, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

5-8. $I_n = \dfrac{e^{ax}}{a}\left\{x^n + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \cdot \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{a^p} \cdot x^{n-p}\right\} + C$

5-9. Aplicando la fórmula general del ejercicio anterior, se obtiene:

$$I = \frac{1}{3} e^{3x}\left(x^4 - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{8}{27} + C\right).$$

5-10. Poner: $u = (\ln x)^2, \quad du = 2\dfrac{\ln x}{x},$

$$x^4\,dx = dv, \qquad v = \frac{x^5}{5},$$

$$\mathrm{I} = \frac{x^5}{5}\left[(\ln x)^2 - \frac{2}{5}\ln x + \frac{2}{25}\right] + \mathrm{C}.$$

5-11. $$\mathrm{I} = -\frac{\cos ax \cdot x^n}{a} - \frac{1}{a}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{a^p}\ldots$$

$$\ldots\cos\left(ax - p\frac{\pi}{2}\right)n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)x^{n-p} + \mathrm{C}.$$

5-12. Aplicando la fórmula anterior, se tiene:

$$\mathrm{I} = -\frac{x^5}{2}\cos 2x + \frac{5x^4}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{5x^3}{2}\cos 2x - \frac{15x^2}{4}\operatorname{sen} 2x$$

$$- \frac{15x}{4}\cos 2x + \frac{15}{8}\operatorname{sen} 2x + \mathrm{C}.$$

5-13. Puede partirse de:

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5x - 5\operatorname{sen} 3x + 10\operatorname{sen} x)$$

$$\mathrm{I} = \frac{e^{2x}}{16}\left[\frac{-5\cos 5x + 2\operatorname{sen} 5x}{29} - \frac{5}{13}(-3\cos 3x + 2\operatorname{sen} 3x)\right.$$

$$\left. + 2(2\operatorname{sen} x - \cos x)\right] + \mathrm{C}.$$

5-15. Poner $u = \sqrt{1+x}$: $\quad du = \dfrac{dx}{2\sqrt{1+x}}, \quad x\,dx = dv, \quad v = x^2/2.$

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2}\sqrt{1+x} - \frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x}}.$$

Entonces se pone:

$$u = 1 + x, \quad du = dx, \quad x^2 = u^2 - 2u + 1.$$

$$\mathrm{I} = \frac{x^2}{2}(1+x)^{1/2} - \frac{1}{10}(1+x)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x)^{3/2} - \frac{1}{2}(1+x)^{1/2}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{15}\sqrt{1+x}(6x^2 + 2x - 4) + \mathrm{C}.$$

5-16. Poner:

$$u = \operatorname{arc\,sen} x^2, \quad du = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx, \quad x\,dx = dv, \quad v = x^2/2.$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \operatorname{arc\,sen} x^2 + \sqrt{1-x^4}\right) + \mathrm{C}.$$

5-17. Si esta integral se escribiese

$$\int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

sería de la forma

$$\int e^u\,du = e^u + \mathrm{C} = e^{\operatorname{arc\,sen} x} + \mathrm{C}.$$

Pero de esta forma no tendría solución.

5-18. $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{sen}^2 x + \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4}\right) + \mathrm{C}.$

5-19. Poner $u = \ln(\ln x)$:

$$du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x}, \quad v = \ln x.$$

$$\mathrm{I} = \ln x[\ln(\ln x) - 1] + \mathrm{C}.$$

5-20. Primeramente se hace un primer cambio de variable, poniendo:

$$u = \cos x + x \cdot \operatorname{sen} x, \quad du = x \cos dx$$

y $\quad x^2\,dx = \dfrac{x\,du}{\cos x}$ ya que $\quad x\,dx = \dfrac{du}{\cos x}.$

$$\mathrm{I} = \int \frac{x\,du}{u^2 \cos x} = \int d\left(-\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{x}{\cos x}.$$

Integrando entonces por partes, se tiene:

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{x}{\cos x} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{x}{\cos x}\right).$$

Ahora bien:

$$d\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{u\,dx}{\cos^2 x}. \quad \frac{1}{u}\,d\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

y:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$I = \operatorname{tg} x - \frac{x}{\cos x\,(\cos x + x \operatorname{sen} x)} + C.$$

5-21. Ejercicio igual al número **5-4.**

5-22. $I = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cdot \sec x + \cos x \cdot \operatorname{cosec} x) + C.$

5-24. Poner $u^3 = \dfrac{1+x^3}{x^3}$ de donde $x^3 = \dfrac{1}{u^3-1}$

$$I = \int \frac{u\,du}{u^3-1} = -\int \frac{u\,du}{(u-1)(u^2+u+1)}.$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{3}\int \frac{u\,du}{u^2+u+1} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+u+1}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3'.$$

$$I_1 = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{x}\sqrt[3]{1+x^3} - 1\right| + C_1.$$

$$I_2 = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1}{x^2}(1+x^3)^{2/3} + \frac{1}{x}(1+x^3)^{1/3} + 1\right| -$$

$$- \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^2+u+1} + C_2.$$

Esta última integral, agrupada con I_3' da I_3

$$I_3 = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left\{\left[\frac{2}{x}(1+x^3)^{1/3} + 1\right]\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} + C_3.$$

$$I = -\frac{1}{3}\left\{\ln\left|\frac{1}{x}(1+x^3)^{1/3} - 1\right| - \frac{1}{2}\ln\right.$$

$$\left.\left|\frac{1}{x}(1+x^3)^{2/3} + \frac{1}{x}(1+x^3)^{1/3} + 1\right| + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{x}(1+x^3)^{1/3} + 1\right]\right. + C.$$

5-25. Poner $u^3 = \dfrac{1+x^3}{x^3}$.

$$I = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}} + C.$$

CAPITULO VI

EXPRESIONES CON RADICALES Y TRINOMIOS

6-1. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x+1}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2-x+1}} = I_{(1)} + I_{(2)}$$

$I_{(1)}$: $$-x^2-x+1 = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$I_{(1)} = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C_1.$$

$I_{(2)}$: Poner $-x^2-x+1 = u$, $\quad x\,dx = -\frac{du}{2} - \frac{dx}{2}$

$$I_{(2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{2} I_{(1)}.$$

$$I = -\sqrt{-x^2-x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

6-2. $$I = \sqrt{x^2+x+1} \ln C \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2+x+1}\right]^{1/2}.$$

6-3. I también puede escribirse:

$$I = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

que se descompondrá en dos integrales

$$I = \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

6-4. Ya que $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - 1/4$,

$$I = \ln C\,[(x + \tfrac{1}{2}) + \sqrt{x^2 + x}].$$

6-5. $I = \text{arc sen}\left(\dfrac{x-a}{a}\right) + C.$

6-6. I también puede escribirse:

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Ahora bien:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$$

e $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-K^2}} = \ln|\,(x + \sqrt{x^2-1})\,| + C$$

$$I = \sqrt{x^2-1} + \ln|\,(x + \sqrt{x^2-1})\,| + C.$$

6-7. Se pondrá primeramente $x^2 = u$, despues $u/a^2 = v$:

$I = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,v = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,(u/a^2) = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,(x^2/a^2) + C.$

$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + C.$$

6-8. Poniendo $a^2 + x^2 = u$,

$$I = 1/3\,(a^2 + x^2)^{3/2} + C.$$

6-10. Ejercicio del curso número 61, ejemplo 3.°.

6-11. *I* puede escribirse:

$$I = \int \frac{dx/a}{x^2\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

Poner $x/a = \text{sen}\,\varphi$: $\quad dx = a \cdot \cos\varphi\,d\varphi.$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\varphi}{\text{sen}^2\varphi} = -\frac{1}{a^2\,\text{tg}\,\varphi} + C.$$

Ahora bien: $\text{tg} = \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{x/a}{\sqrt{1-x^2/a^2}}$

$$I = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 \cdot x} + C$$

6-12. Poner $a^2 + x^2 = u$.

$$I = 1/3\sqrt{a^2 + x^2}(x^2 - 2a^2) + C.$$

6-13. $I = \text{arc sen}\left(\frac{x+6}{2\sqrt{11}}\right) + C.$

Considerar que $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.

6-14. Descomponer la integral en dos:

$$I = -8\sqrt{-x^2 - 7x + 15} - 37 \text{ arc sen}\left(\frac{2x+7}{\sqrt{109}}\right) + C.$$

6-15. I puede escribirse:

$$I = \int\sqrt{113 - (x-9)^2}\,dx = \int\frac{113 - (x-9)^2}{\sqrt{113 - (x-9)^2}}\,dx,$$

$$I = 113 \text{ arc sen}\left(\frac{x-9}{\sqrt{113}}\right) + (x-9)\sqrt{113(x-9)^2} - I,$$

$$I = \frac{113}{2}\text{ arc sen}\left(\frac{x-9}{\sqrt{113}}\right) + \left(\frac{x-9}{2}\right)\sqrt{-x^2 + 18x + 32} + C.$$

6-16. Curso número 61, ejemplo 1.º.

6-17. $$I = \int\frac{4x\,dx}{\sqrt{x^2 - 18x + 106}} - 5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 18x + 106}}$$

Poniendo $x^2 - 18x + 106 = u$, $\quad 4x\,dx = 2\,du + 36\,dx$

$$I = 4\sqrt{u} + 31\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 18x + 106}}$$

Ahora bien: $x^2 - 18x + 106 = (x-9)^2 + 25$

$$I = 4\sqrt{u} + 31\int\frac{dx}{\sqrt{(x-9)^2 + 25}}$$

$$= 4\sqrt{x^2 - 18x + 106} + 31\int\frac{dv}{\sqrt{v^2 + K^2}}$$

poniendo $\quad v = 5\sec\varphi, \quad I = 4\sqrt{x^2 - 18x + 106} + 31\,\varphi.$

Ahora bien: $\varphi = \ln\left(\frac{x-9}{5} + \sqrt{\frac{(x-9)^2}{25} + 1}\right)$

$$I = 4\sqrt{x^2 - 18x + 106} + 31 \ln \left| \frac{(x-9) + \sqrt{x^2 - 18x + 106)}}{5} \right| + C.$$

6-18. Curso número 61, ejemplo 2.°.

6-20. Curso número 61, ejemplo 4.°.

6-21. Podrá descomponerse como sigue

$$2x^2 - 7x + 10 = x^2 - 6x + 6 \quad + x^2 - 6x + 6 \quad + 5x - 2$$

$$I = \int \frac{x^2 - 6x + 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx + \int \frac{x^2 - 6x + 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx + \int \frac{5x - 2}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx$$

$$I = \int 2\sqrt{x^2 - 6x + 6}\,dx + \int \frac{2x - 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx + \int \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx$$

$$= \quad I_{(1)} \quad + \quad I_{(2)} \quad + \quad I_{(3)}.$$

Para integrar $I_{(1)}$ se escribirá: $(x^2 - 6x + 6) = (x-3)^2 - 3$

y se pondrá $u = x - 3 = \sqrt{3}\,\text{cosec}\,\varphi$.

(Ver el curso número 61, ejemplo 4.°.)

$$I_{(1)} = 3\left[\frac{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 6}}{3} - \ln\left|\frac{(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 6})}{\sqrt{3}}\right|\right]$$

$$I_{(2)} = 2\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

$$I_{(3)} = I_{(2)} + \int \frac{x + 10}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}\,dx$$

$$I_{(3)} = I_{(2)} + \sqrt{x^2 - 6x + 6} + 13 \ln \left|\frac{(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 6})}{\sqrt{3}}\right|.$$

Reagrupando estos cálculos, se tiene:

$$I = 10 \ln \left|\frac{x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 6}}{\sqrt{3}}\right| + (x + 2)\sqrt{x^2 - 6x + 6} + C.$$

6-22. $I = \ln|(x + 2) + \sqrt{x^2 + 4x}| + C.$

6-23. La integral propuesta se descompone en dos.

$$I = \sqrt{x^2 + 9} + 2 \ln|(x + \sqrt{x^2 + 9})| + C.$$

6-24. I es de la forma

$$\int \sqrt{K^2 - u^2}.$$

Poniendo $u = K \operatorname{sen} \varphi$:

$$x = 5 \operatorname{sen} \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arc\,sen} x/5, \quad I = 25\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\varphi\right)$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5} + C.$$

6-25. $I = \dfrac{x}{2}\sqrt{3 - 4x^2} + \dfrac{3}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$

6-27. Puede escribirse:

$$4x^2 - 4x + 5 = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$$

$$I = 2\int\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\, dx.$$

Pongamos $u = x - 1/2$:

$$u^2 = K^2 \sec^2 \varphi, \qquad du = K \operatorname{cosec} \varphi \, d\varphi.$$

(Curso número 62, ejemplo 2.º.)

$$I = \frac{2K^2}{2}\left[\ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 + K^2}}{K}\right| + \frac{u\sqrt{u^2 + K^2}}{K^2}\right]$$

$$I = \ln\left|x + \frac{1}{2}(\sqrt{4x^2 - 4x + 5} - 1)\right| + \left(\frac{2x - 1}{4}\right)\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + C.$$

6-28. Haciendo el cambio de variable propuesto, y teniendo en cuenta el estudio hecho en el curso, número 20, segundo caso, se obtiene:

$$I = -\frac{1}{b\sqrt{2a}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{a - bx}}{\sqrt{2a} - \sqrt{a - bx}}\right| + C.$$

6-29. Ya que $\sqrt{1+x-x^2} = xz - 1$;

$$x = \frac{1+2z}{1+z^2}$$

$$dx = \frac{-2z^2-2z+2}{(1+z^2)^2}\,dz \quad \text{y} \quad \sqrt{1+x-x^2} = \frac{z^2+z-1}{1+z^2}$$

$$I = -2\int \frac{dz}{z^2+2z+2} = -2\int \frac{d(z+1)}{(z+1)^2+1}$$

$$= -2 \operatorname{arc\,tg}(z+1) + C$$

$$I = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + C.$$

6-30. $I = \frac{5}{8} \operatorname{arc\,sen} \frac{(2x-1)}{\sqrt{5}} + \frac{(2x-1)}{4}\sqrt{-x^2+x+1} + C.$

6-31. $I = \left(\frac{2x-1}{4}\right)\sqrt{x^2-x-1} - \frac{5}{8}\ln\left|\left[\left(x-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2-x-1}\right]\right| + C.$

6-32. $-9x^2+3x+4 = 9\left[\frac{17}{36} - \left(x-\frac{1}{6}\right)^2\right]$.

Se reduce al primer caso estudiado número 24 del curso.

$$I = \frac{17}{24} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{17}}\right) + \left(\frac{6x-1}{12}\right)\sqrt{-9x^2+3x+4} + C.$$

6-33. Haciendo el cambio de variable propuesto:

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+6u+5}}.$$

Ahora bien: $u^2+6u+5 = (u+3)^2-4$

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+3)^2-4}} = -\ln\left|\left[(u+3)+\sqrt{u^2+6u+5}\right]\right| + C$$

$$I = -\ln\left|\left[\frac{(6x+4)+2\sqrt{5x^2+8x+3}}{2x+1}\right]\right| + C.$$

Observación. — Escribiendo

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{u+3}{2}\right)^2 - 1}}$$

$$I = -\int \frac{d\left(\frac{u+3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{u+3}{2}\right)^2 - 1}}$$

se habría podido obtener también

$$I = -\operatorname{arc\,cosec}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right) + C.$$

6-35. $I = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C.$

6-36. Descomponer la integral en dos partes.

Para la primera, poner $u = 1 + 4x^2$,

Para la segunda, poner $v = 2x$.

$$I = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+4x^2} + 3\ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right|\right] + C.$$

6-37. $I = \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

6-38. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \int \frac{du}{\sec^4 u}. \quad \text{Ahora bien} \quad \int \frac{du}{\sec^2 u} = -\cot u$$

$$I = \int \frac{1}{\sec^2 u} \cdot d(-\cot u).$$

Integremos por partes:

$$I = -\frac{\cot u}{\sec^2 u} + \int \cot u \cdot d\left(\frac{1}{\sec^2 u}\right) = -\frac{\cot u}{\sec^2 u} - 2\int \frac{\operatorname{cosec}^2 u}{\sec^4 u}\, du.$$

Ahora bien $\dfrac{1}{\sec^2 u} = \cot^2 u - 1$

$$I = -\frac{\cot u}{\sec^2 u} - 2\int \frac{du}{\sec^4 u} - 2\int \frac{du}{\sec^2 u}$$

$$3I = -\frac{\cot u}{\sec^2 u} + 2\cot u$$

$$I = \frac{1}{3}\cot u\,(3 - \cot^2 u).$$

Entonces es preciso volver a x:

$$I = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\left(\frac{2x^2-1}{3x^2}\right) + C.$$

6-39. $I = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x^2-1)^{3/2}}{x^3} + C.$

6-40. $I = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} + C.$

6-41. $I = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}}\right) + \operatorname{arc}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}}\right) + C.$

CAPITULO VII

FRACCIONES RACIONALES

7-1. $\dfrac{x^3}{2x-1} \equiv ax^2 + bx + c + \dfrac{r}{2x-1}$

$x^3 \equiv 2ax^3 + x^2(2b-a) + x(2c-b) - c + 2$

$a = 1/2, \quad b = 1/4, \quad c = 1/8, \quad R = c = 1/8$

$I = 1/2 \int x^2\,dx + 1/4 \int x\,dx + 1/8 \int dx + 1/8 \int \dfrac{dx}{2x-1}$

$I = \dfrac{1}{48}\,[8x^3 + 6x^2 + 6x + 3 \ln|2x-1| + C].$

7-2. $4x^2 - 4x + 1$ tiene como raíz $x = \frac{1}{2}$

$4x^2 - 4x + 1 = 4(x - \frac{1}{2})^2$

$I = -\dfrac{1}{4x-2} + C.$

7-3. $I = \ln\left|\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)^{1/3}\right| + C$

7-4. $\dfrac{x^3}{1+x^2} \equiv mx + n + \dfrac{ax+b}{1+x^2}$

$m = 1, \quad n = b = 0, \quad a = -m = -1$

$I = \int x\,dx - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2}$

$I = \frac{1}{2}\,[x^2 - \ln(1+x^2)] + C.$

7-5. Siendo las ríces del trinomio

$$x_1 = -\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\,(x + \tfrac{1}{2})(x + 1)$$

$$\frac{1}{2x^2 + 3x + 1} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x + \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 1}\right], \quad \text{de donde:} \quad A = 2, \quad B = -2$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{x + \frac{1}{2}} - 2\int \frac{dx}{x + 1}$$

$$I = \ln\left|\frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1}\right| + C.$$

7-6. $$1 = -\frac{2}{x - 1} + \ln|x - 1| + C.$$

7-7. $$\frac{1}{x(1 + x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{mx + n}{1 + x^2}$$

$$1 \equiv A(1 + x^2) + x(mx + n).$$

Si se deriva miembro a miembro:

$$0 = 2A\,x + 2mx + n; \quad \text{para} \quad x = 0, \quad A = 1.$$

Para $x = 0$, $n = 0$ y pora $x = 1$, $m = -1$. Por consiguiente

$$\frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$$

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$$

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

$$I = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right| + C.$$

7-8. $$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| + C.$$

7-10. $$\frac{x^2}{(x - 2)(x - 3)} \equiv A + \frac{mx + p}{(x-2)(x-3)}, \quad A = 1, \quad m = 5, \quad p = -6.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Por consiguiente, puede escribirse:

$$I = \int dx + 5\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x-3)} - 7\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$$

Ahora bien:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = -\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

$$I = \int dx + 8\int \frac{dx}{x-3} - 3\int \frac{dx}{x-2}$$

$$I = x + 8\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$$

$$I = x + \ln\left|C\frac{(x-3)^8}{(x-2)^3}\right|.$$

7-11. $$I = x + \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \ln|(2x-1-\sqrt{5})| + \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}} \cdot \ln|(2x-1+\sqrt{5})| + C.$$

7-12. Hagamos la división:

$$\begin{array}{l|l} x^{2m}-1 & x^2-1 \\ +x^{2m-2} & \hline x^{2m-2}+x^{2m-4}+\ldots+1 \\ +x^{2m-4} & \\ \ldots x^2 & \end{array}$$

$$I = \int (x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots + x^2 + 1)\,dx$$

$$I = \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \frac{x^{2m-3}}{2m-3} + \frac{x^{2m-5}}{2m-5} + \ldots + \frac{x^3}{3} + x + C.$$

7-13. $$I = \frac{3}{25}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| - \frac{7}{5(x-3)} + C.$$

7-14. $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^3} \equiv \dfrac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Px+R}{(x^2+1)}.$

Se tendrá: $P = 1, \quad R = 0, \quad M = -1, \quad N = 0.$

$$I = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

7-15. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x).$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{Mx+N}{x^2+x+1} + \frac{Px+R}{x^2-x+1}.$$

Se obtendrá entonces: $P = -\frac{1}{2}$ y $R = N = M = \frac{1}{2}$.

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

I_1 : poner $x^2 + x + 1 = u$,

$$I_1 = \frac{1}{4}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\int\frac{du}{u} - \frac{1}{2}I_4,$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_2$$

I_3 e I_4 son del tipo estudiado en el curso, núm. 20, ejemplo 1.º.

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3$$

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_4$$

$$I = \frac{1}{4}[\ln|x^2+x+1| - \ln|x^2-x+1|] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C.$$

7-16. Problema tratado en el curso, núm. 34, ejemplo 1.º.

7-18. $$I = \frac{a}{a^2 - b^2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{b^2 - a^2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{b}\right) + C.$$

7-19. Primeramente descomponer:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} \equiv \frac{Mx + N}{(x^2-1)^2} + \frac{Px + Q}{(x^2-1)} \qquad \begin{cases} N = Q = 1 \\ M = P = 0. \end{cases}$$

A continuación:

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Finalmente:

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} \equiv \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

Se obtendrá: $A = B = C = 1/4$ y $D = -1/4$.

$$I = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{x^2-1}\right] + C'.$$

7-20. Se descompondrá:

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \equiv \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x-1)^3} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{(x-1)}.$$

Por consiguiente, se obtendrán seis integrales para calcular.

7-21. $$I = \frac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

7-22. $$I = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

7-23. Se descompondrá:

$$\frac{1}{x^4(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{Mx + N}{1 + x^2}$$

Se obtendrá: $A = n = 1$, $B = D = m = 0$, $C = -1$.

$$I = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \text{arc tg}\, x + C'.$$

7-24. $I = \dfrac{1}{2(1+x^2)}\left[\dfrac{1}{2(1+x^2)} - 1\right] + C.$

7-25. Descomponiendo en elementos simples, se tendrá:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\int \frac{x\,dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \int \frac{x\,dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right\}$$

Se reduce el problema a calcular cuatro integrales de forma clásica dos a dos.

7-27. $I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\text{arc tg}\, x + C.$

7-28. Puede escribirse:

$$9x^2 + 6x + 4 = 9[(x + 1/3)^2 + 1/3]$$

$$I = \frac{1}{9}\ln|9x^2 + 6x + 4| + \frac{7}{9\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

7-29. La integral propuesta puede descomponerse en otras dos, $I_{(1)}$ e $I_{(2)}$:

$$I_{(1)} = \int \frac{x}{(5x-3)(4-3x)}\,dx, \qquad I_{(2)} = 8\int \frac{dx}{(5x-3)(4-3x)}$$

Ahora bien:

$$\frac{x}{(5x-3)(4-3x)} \equiv \frac{A}{5x-3} + \frac{B}{4-3x} = \frac{3}{11(5x-3)} + \frac{20}{55(4-3x)}$$

Y:

$$\frac{1}{(5x-3)(4-3x)} \equiv \frac{a}{5x-3} + \frac{b}{4-3x} = \frac{5}{11(5x-3)} + \frac{3}{11(4-3x)}$$

$$I = I_{(1)} + I_{(2)}$$

$$I = \frac{43}{55}\ln|5x-3| - \frac{28}{33}\ln|4-3x| + C.$$

7-30. $I = \dfrac{5x}{4} + \dfrac{7}{4}\ln|2x-3| - \dfrac{5}{8(2x-3)} + C.$

7-31. $$\frac{x^2}{(x^2-4)(x+2)} \equiv \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-2)}.$$

Se obtendrá:

$$A = -1, \quad B = 3/4, \quad C = 1/2.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{(x^2-4)(x-2)} \equiv \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)} + \frac{c}{(x-2)}$$

$$a = -1/4, \quad b = -1/16, \quad c = +1/16$$

$$I = \frac{2}{(x+2)} + \frac{6}{2}\ln|x^2-4| + C'.$$

7-32. $$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{9}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$$

7-33. $$I = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+5-\sqrt{12}}{x+5+\sqrt{12}}\right| + C.$$

7-35. $$-x^2-12x+8 = -1\left[(x+6)^2 - \frac{(144+32)}{4}\right] = 44-(x+6)^2.$$

$$I = \int\frac{dx}{44-(x+6)^2} \quad \text{de la forma} \quad \int\frac{du}{K^2-u^2}$$

con $K = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ y $u = x+6$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{44}}\ln\left|\frac{x+6+2\sqrt{11}}{-x-6+2\sqrt{11}}\right| + C.$$

7-36. $$I = \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+7}{\sqrt{11}}\right) + C.$$

7-37. $$I\frac{7}{2}\ln|x^2+12x+52| - \frac{39}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+6}{4}\right) + C.$$

7-38. $$I = 2\int\frac{x^3\,dx}{2x^2-6x+11} - \int\frac{dx}{2x^2-6x+11}.$$

$$\frac{x^3}{2x^2-6x+11} \equiv Ax + B + \frac{mn+n}{2x^2-6x+11}$$

$$\begin{cases} A = 1/2, & B = 3/2 \\ m = 7/2, & n = -33/2 \end{cases}$$

$$I = \int x\,dx + 3\int dx + 7\int \frac{x\,dx}{2x^2-6x+11} - 34\int \frac{dx}{2x^2-6x+11}.$$

Se pondrá entonces: $2x^2-6x+11 = u$, $\quad x\,dx = \frac{du}{4} + \frac{3}{2}\,dx.$

$$I = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{7}{4}\ln|2x^2-6x+11| - \frac{47}{2\sqrt{13}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right) + C$$

7-39. $$I = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x^2+2x+4| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

7-40. $$I \equiv \int \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{C}{x-2}$$

Identificando, se obtiene $A = 3$, $\quad B = 1$, $\quad C = 5$.
Por consiguiente, se tendrán cuatro integrales.

$$I = \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| + 5\ln|x-2| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

7-41. La descomposición en elementos simples de la integral pro puesta se hará escribiendo:

$$\frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x} \equiv Ax + B + \frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2-2x}$$

Se obtendrá: $A = 1$, $\quad B = -2$, $\quad a = 1$, $\quad b = -6$, $\quad c = 2$.

De donde: $$I = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{x^2-6x+2}{x(x^2+x-2)}\,dx.$$

Ahora bien: $$\frac{x^2-6x+2}{x(x^2+x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+x-2} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ M = 2 \\ N = -5 \end{cases}$$

Finalmente, después de haber puesto $x^2+x-2 = u$:

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + \ln|x^2+x-2| + 2\ln\left|\frac{x+2}{1+x}\right| + C.$$

7-42. $I = \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

7-43. Puede escribirse:

$$\frac{x^3+x+2}{(x^2+2x+3)^2} \equiv \frac{Mx+N}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+2x+3};$$

Identificando, se obtendrá: $P=0$, $Q=1$, $M=-1=N$.

$$I = \frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

7-44. $I = -\frac{4}{5}(x-1)^{-5} - 2(x-1)^{-4} - \frac{8}{3}(x-1)^{-3} - 2(x-1)^{-2} - -(x-1)^{-1} + C.$

7-45. Desarrollando la integral propuesta, se obtiene:

$$I = \int \frac{2x^3 - x^5 + 5x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Ahora bien:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-1}.$$

De donde:

$$I = 3\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + 2\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \ln|x^2+1| - \operatorname{arc\,tg} x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Ahora bien, puede escribirse:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

o aun

$= \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x \cdot x\,dx}{(x^2+1)^2}$, que se integrará por partes, poniendo

$u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

Finalmente:

$$I = \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{(x-3)}{2(x^2+1)} + C'.$$

7-47. $I = \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)}(3x+1) + C.$

7-48. Se escribirá:

$$\frac{x^2+3x}{(x^2+1)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Se obtendrá:

$$A = -1, \quad B = -1/2, \quad M = 1/2 \quad y \quad N = 3/2$$

$$I = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + C.$$

Verificaciones de fracciones racionales

7-49. Ver el curso, núm. 33, ejercicio 2.°.

7-50. Si se descompone en elementos simples, se obtiene:

$$\frac{2+3x}{(4-x)^3} \equiv \frac{A}{(4-x)^3} + \frac{B}{(4-x)^2} + \frac{C}{(4-x)}$$

Con: $A = 14, \quad B = -3, \quad C = 0.$

$$I = 14\int\frac{dx}{(4-x)^3} - 3\int\frac{dx}{(4-x)^2} = I_{(1)} + I_{(2)}.$$

Para $I_{(1)}$, ponemos $4-x = v$: $\quad dv = -dx$

$$I_{(1)} = -14\int v^{-3}\,dv = \frac{14}{2}v^{-2} = \frac{7}{(4-x)^2} + C_1.$$

Para $I_{(2)}$, ponemos $4-x = v$

$$I_{(2)} = +3\int v^{-2}\,dv = -3v^{-1} = -\frac{3}{(4-x)} + C_1$$

$$I = \frac{7}{(4-x)^2} - \frac{3}{(4-x)} + C'. \qquad \text{c.q.d.}$$

7-51. La respuesta a controlar no es exacta, ya que

$$\frac{2x^2-x+2}{2x} \equiv Ax + B + \frac{C}{2x-3}$$

$$A = B = 1 \quad y \quad C = 5.$$

7-52. Descomponiendo la fracción en elementos simples, se escribe:

$$\frac{2x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$A = N = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad M = +2$$

$$I = \int x^{-3}\,dx - \int x^{-2}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$I = -1/2x^{-2} + x^{-1} + \ln|x^2+x+1| + C$$

...que es la respuesta a controlar.

7-53. La descomposición en elementos simples permite escribir

$$I = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1},$$

lo que lleva al resultado a controlar.

7-54. Escribimos:

$$\frac{x^5+2}{x^3-1} \equiv Ax^2+Bx+C+\frac{Mx^2+Nx+P}{x^3-1}.$$

Se obtendrá: $A = M = 1, \quad B = C = N = 0, \quad P = 2,$

$$I = \int x^2\,dx + \int\frac{x^2+2}{x^3-1}\,dx.$$

Ahora bien, $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$I = \frac{x^3}{3} + \int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

...después de haber descompuesto la segunda integral en elementos simples.

7-55. La integral propuesta también puede escribirse:

$$\int\frac{\sqrt{2x+1}(x-4)}{3}.$$

Entonces poner $2x+1 = u^2$.

$$I = \frac{1}{2}\int u^2\,du - \frac{3}{2}\int du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{3}{2}u + C$$

$$I = \frac{\sqrt{2x+1}(2x+1)}{6} - \frac{9}{6}(\sqrt{2x+1})$$

lo que, simplificando, da la solución anunciada.

7-57. Poniendo $x^2 = u$, se obtiene:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}. \quad \text{Ahora bien} \quad \frac{1}{1+u} = \frac{1-u}{1-u^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} - \frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{(1-u^2)^{3/2}} = I_{(1)} + I_{(2)}.$$

$I_{(1)}$ se calcula poniendo $u = \operatorname{sen}\varphi$

$$I_{(1)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi + C_1 = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}} + C_1$$

$$I_{(2)} = \frac{1}{2}\int v^{-3/2}\,dv, \qquad \text{con} \qquad v = 1-u^2$$

$$I_{(2)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}.$$

Por consiguiente, se tiene:

$$I = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}.$$

Simplificando se obtiene

$$I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C. \qquad \text{c.q.d.}$$

7-58. $$\frac{20x+17}{(2x+1)^2(3x+5)} \equiv \frac{A}{(2x+1)^2} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{3x+5}$$

$A = 2, \quad B = 2, \quad C = -3,$

la solución se obtiene sin dificultad.

7-59. Descomponemos en elementos simples:

$$\frac{9x+5}{x(x+1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}$$

$$A = B = 1, \quad M = -2, \quad N = -3$$

$$I = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

para las dos últimas integrales, ponemos $x^2 + 2x + 5 = u$:

$$I = \ln|x| + \ln|x+1| - \int \frac{du}{u}$$

$$+ 2\int \frac{dx}{x^2+2x+5} - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$I = \ln|x| + \ln|x+1| - \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Nota. — Hay por consiguiente una falta de impresión en la solución propuesta.

7-60. Descomponemos en elementos simples

$$\frac{3-x}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ B = -4 \\ C = +4 \end{cases}$$

la solución es fácil de comprobar.

7-61. La fracción puede escribirse:

$$A + \frac{mx+p}{x^2-x+1}.$$

Se obtendrá: $A = 1, \quad m = 2, \quad p = 0.$

Después se pondrá: $x^2 - x + 1 = u.$

7-62. Es necesario descomponer en elementos simples

$$\frac{2x^3+2x^2-2x+1}{x^2(x^3-2x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+1}.$$

Se obtendrá: $A = 1, \quad B = 0, \quad M = 2, \quad N = -3.$

Después se pondrá $x^3 - 2x + 1 = u = (x-1)^2$.

$$I = \int x^{-2}\,dx + \int \frac{du}{u} - \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$I = -\frac{1}{x} + \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x-1}$$

$$I = \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x^2-x} + C. \qquad \text{c.q.d.}$$

7-63. $(x^2 + 1) = (x - 1)^2 + 2x$

$$I = \int (x - 1)\, dx + 2\int \frac{x\, dx}{x - 1}$$

$$I = \left[\frac{x}{2}(x + 2) + 2\, ln\, |\, x - 1\, |\right]_2^3$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{8}{2} + 2 \ln 2 = \frac{7}{2} + \ln 2^2 = \frac{7}{2} + \ln 4.$$

CAPITULO VIII

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

8-1. *Primer caso*: m es par. Pongamos $m = 2p$

$$z^{2p} = (z^2 + 1)[z^{2p-2} - z^{2p-4} + z^{2p-6} \ldots - (-1)^p] + (-1)^p$$

$$\frac{z^{2p}}{1+z^2} = z^{2p-2} - z^{2p-4} + z^{2p-6} \ldots - (-1)^p + \frac{(-1)^p}{1+z^2}$$

$$I = \int z^{2p-2}\,dz - \int z^{2p-4}\,dz + \int z^{2p-2}\,dz \ldots$$

$$- (-1)^p \int dz + (-1)^p \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$I_{\text{para } m=2p} = \frac{z^{2p-1}}{2p-1} - \frac{z^{2p-3}}{2p-3} + \ldots - (-1)^p z + (-1)^p x + C.$$

Segundo caso: m es impar. Pongamos $m = 2p + 1$

$$z^{2p+1} = (z^2 + 1)[z^{2p-1} - z^{2p-3} + \ldots + (-1)^{p-1} z] + (-1)^p z$$

$$\frac{z^{2p-1}}{1+z^2} = z^{2p-1} - z^{2p-3} + \ldots + (-1)^{p-1} \cdot z + (-1)^p \frac{z}{1+z^2}$$

$$I_{\text{para } m=2p+1} = \frac{z^{2p}}{2p} - \frac{z^{2p-2}}{2p-2} + \frac{z^{2p-4}}{2p-4}$$

$$- \ldots \frac{(-1)^{p-1} \cdot z^2}{2} + (-1)^p \left[\frac{1}{2} \ln |1 + z^2|\right] + C.$$

8-2. Caso particular del primer caso del número anterior, con $p = 3$.

$$I = 1/5 \operatorname{tg}^5 x - 1/3 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C.$$

8-3. Caso particular del segundo caso del número **8-1**, con $p = 3$.

$$I = 1/6 \operatorname{tg}^6 x - 1/4 \operatorname{tg}^4 x + 1/2 \operatorname{tg}^2 x - 1/2 \ln (1 + \operatorname{tg}^2 x) + C.$$

8-4. Haciendo el cambio de variable propuesto,

$$I = -\int (1 - x^2)^3 \, dx$$

Se desarrollará el cubo

$$I = \frac{1}{7}\cos^7 \theta - \frac{3}{5}\cos^5 \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta + C.$$

8-5. Poner: $x = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$

$$I = -\frac{1}{6}\cos \theta \left(\operatorname{sen}^5 \theta + \frac{5}{4}\operatorname{sen}^3 \theta + \frac{15}{8}\operatorname{sen} \theta\right) + \frac{15}{48}\theta + C.$$

8-6. $I = +1/5 \operatorname{sen}^5 \theta - 2/3 \operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen} \theta + C.$

8-7. Poner: $a + b \cos x = u.$

De donde: $\operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{b} du,$

$$I = -\frac{1}{b}\int \frac{du}{u}$$

$$I = -\frac{1}{b}\ln |a + b \cos x| + C.$$

8-9. I puede escribirse también:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Pongamos $\operatorname{tg} x = u$

$$I = \int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du/\sqrt{2}}{1 + (u/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

8-10. La integral propuesta puede escribirse también:

$$I = \frac{1}{2^3}\int \operatorname{sen}^3 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2^3}\int \operatorname{sen}^3 2\theta \cdot 2 \, d\theta; \quad \text{pongamos } 2\theta = u$$

$$I = \frac{1}{2^4}\int \operatorname{sen}^3 u \, du = \frac{1}{2^4}\int (1 - \cos^2 u) \operatorname{sen} u \, du$$

$$I = \frac{1}{2^4}\int \operatorname{sen} u \, du - \frac{1}{2^4}\int \cos^2 u \cdot \operatorname{sen} u \, du$$

$$I = -\frac{1}{2^4}\cos u + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{\cos^3 u}{3} + C$$

$$I = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}\cos^3 2\theta - \cos 2\theta\right) + C.$$

8-11. $I = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7\theta + C.$

8-12. I puede escribirse también:

$$I = \int (1 - \cos^2\theta)\cos^4\theta \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Pongamos $\cos\theta = u$

$$I = -\int (1 - u^2)u^4\, du = -\int u^4\, du + \int u^6\, du$$

$$I = -\frac{1}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{7}\cos^7\theta + C.$$

8-13. Para los detalles de este cálculo, volver a los del ejercicio número **9-67.**

8-14. Poner $5 + x^2 = u^2$:

$$u = \sqrt{5 + x^2}, \qquad u\, du = x\, dx$$

$$I = \int x^2\sqrt{5 + x^2}\cdot x\, dx = \int (u^2 - 5)u^2\, du$$

$$I = \int u^4\, du - 5\int u^2\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{5u^3}{3} + C$$

$$I = \frac{1}{5}(5 + x^2)^{5/2} - \frac{5}{3}(5 + x^2)^{3/2} + C.$$

8-15. Poniendo $u = 3x$,

$$I = 1/3\int \operatorname{sen}^3 u \cdot \cos^5 u \cdot du = 1/3\int (1 - \cos^2 u)\cos^5 u(-d\cos u)$$

Entonces se pone $\cos u = v$:

$$I = -\frac{1}{3}\int v^5\, dv + \frac{1}{3}\int v^7\, dv = -\frac{1}{3}\cdot\frac{v^6}{6} + \frac{1}{3}\frac{v^8}{8}$$

$$I = \frac{\cos^6 3x}{6}\left(\frac{\cos^2 3x}{4} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

8-16. Poner: $1 - \cos x = 2\,\mathrm{sen}^2\, x/2$

$$I = -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + C.$$

8-17. $I = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\mathrm{sen}\,\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3\dfrac{3x}{2}\right) + C.$

8-18. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = -\int \frac{du}{u(1+u)} = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{1+u}$$

ya que $$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$$

$$I = \ln \cdot C\,\frac{1+\cos x}{\cos x}.$$

8-20. Poner: $1 + \cos x = 2\cos^2 x/2$

$$I = x - \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C.$$

8-21. Ya que $d(\mathrm{tg}\,x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$:

$$I = \int \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{sen}^4\, x}.$$

Ahora bien $\mathrm{sen}^4\, x = (1 - \cos^2 x)^2$

y $$1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, x} = \frac{\mathrm{tg}^2\, x}{1+\mathrm{tg}^2\, x}$$

$$I = \int \left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)^2 du, \quad \text{poniendo} \quad u = \mathrm{tg}\,x:$$

$$I = \int u^{-4}\,du + 2\int u^{-2}\,du + \int du$$

$$I = \mathrm{tg}\,x - \frac{2}{\mathrm{tg}\,x} - \frac{1}{3\,\mathrm{tg}^3\, x} + C.$$

8-22. Ejercicio idéntico al número **8-9.**

8-23. Haciendo el primer cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = 2\int \frac{dt}{t\sqrt{2(1-t^2)}}.$$

Entonces ponemos $1 - t^2 = u$:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{(1-u)\sqrt{u}}.$$

Ponemos $u = \operatorname{sen}^2 \varphi$, $du = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$:

$$I = -\sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi};$$

esta integral se calcula en el curso número 36, ejemplo 2.°.

$$I = -\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| + C.$$

Ahora bien

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{u} = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - t^2} = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}.$$

$$I = -\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x/2} \right) \right| + C.$$

8-24. $I = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x - \frac{3}{8} \ln |2 \operatorname{sen} x - 1| + C.$

8-25. Antes del cambio de variable propuesto, tomamos $t = \operatorname{tg} x/2$:

$$I = 2 \int \frac{(1+t^2)}{t^2-1)(t^2-3)} dt$$

$$\frac{1+t^2}{(t^2-1)(t^2-3)} = \frac{-1}{t^2-1} + \frac{2}{t^2-3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right)$$

$$- \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t/\sqrt{3}} + \frac{1}{1-t/\sqrt{3}} \right)$$

$$I = 2 \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{t/\sqrt{3}+1}{t/\sqrt{3}-1} \right| \Bigg\} + C$$

$$I = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x/2 + 1}{\operatorname{tg} x/2 - 1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x/2 + \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x/2 - \sqrt{3}} \right| + C.$$

8-26. Solución en el curso núm. 45, ejemplo 24.

8-27. Puede escribirse:

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \right)^2$$

$$I = \int 1 - \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \int dx - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx.$$

La segunda integral se calcula en el problema núm. **9-47.**

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$I = 2x - \operatorname{tg} x + C$$

8-28. Ya que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,

$$I = \int (4\cos^6 x - 3\cos^4 x)\, dx.$$

Ahora bien $\int \cos^6 x\, dx$ se ha calculado en el núm. **9-57**

y $\int \cos^4 x\, dx$ se ha calculado en el núm. **9-45.**

$$I = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x + x\right] + C.$$

Verificación de integrales

8-29. $$I = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx.$$

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = I_{(1)} - I_{(2)}.$$

Para resolver $I_{(1)}$ poner $\operatorname{sen} x = v$, $I_{(1)} = -\frac{1}{2} v^{-2} + C_1$.
Para resolver $I_{(2)}$ poner $\operatorname{sen} x = u$, $I_{(2)} = \ln|u| + C_2$.

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \ln|\operatorname{sen} x| + C. \qquad \text{c.q.d.}$$

8-30. Puede escribirse:

$$I = \int \frac{1}{a^2 \cos^2 x} \cdot \frac{dx}{1 + (b/a)^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Poner $\frac{b}{a} \operatorname{tg} x = u$

$$I = \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\, u + C.$$

$$I = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right) + C. \qquad \text{c.q.d.}$$

8-31. La integral propuesta puede escribirse:

$$I = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} - 2\int \operatorname{sen} x\, dx + \int \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

I_1 se ha calculado en el curso núm. 36, primer ejemplo:

$$I_1 = \ln |\operatorname{tg} x/2| + C_1,$$
$$I_2 = 2 \cos x + C_2,$$
$$I_3 = -\cos x + 1/3 \cos^3 x.$$

Por consiguiente, la solución propuesta está bien comprobada.

8-32. $I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx - \int \cos x\, dx.$

Este problema se ha tratado en el curso núm. 42, 2.° ejemplo.

8-34. Puede escribirse:

$$\operatorname{cosec}^3 x = \frac{e^{3x} + 3e^{x} + 3e^{-x} + e^{-3x}}{8} = \frac{1}{4}(\operatorname{cosec} 3x + 3 \operatorname{cosec} x)$$

$$I = \frac{1}{4}\int \operatorname{cosec} 3x\, dx + \frac{3}{4}\int \operatorname{cosec} x\, dx$$

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{\sec 3x}{3} + 3 \sec x\right) + C.$$

Nota. — La respuesta propuesta no es adecuada.

8-35. Puede escribirse:

$$\sec^4 x = \left(\frac{\operatorname{cosec} 2x - 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\operatorname{cosec}^2 2x - 2 \operatorname{cosec} 2x + 1\right)$$

$$I = \frac{1}{8}\int \operatorname{cosec} 4x\, dx - \frac{2}{4}\int \operatorname{cosec} 2x\, dx + \frac{3}{8}\int dx$$

ya que $\operatorname{cosec}^2 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{cosec} 4x + 1).$

La solución propuesta se comprueba con facilidad.

8-37. Para comprobar esta integral, basta volver a los resultados obtenidos en el núm. **8-30.**

8-38. Este ejercicio se ha calculado en el núm. **9-79.**

8-39. Poner tg $x/2 = t$:

$$I = 2\int \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)(4t^2+1)}\,dt$$

$$\frac{-t^2+1}{(1+t^2)(4t^2+1)} \equiv \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{4t^2+1}$$

$$A = C = 0, \quad B = -2/3, \quad D = 5/3$$

$$I = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{5}{3}\int \frac{dt}{1+4t^2} = -\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} t + \frac{5}{6}\operatorname{arc\,tg} 2t + C'.$$

Se vuelve a obtener la solución propuesta refiriéndose a x.

8-40. *Poniendo*

$$t = \operatorname{tg} x/2, \quad 2 + \cos x = \frac{3+t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{(1+t^2)}{(t^2+3)^2}\,dt.$$

Ahora bien

$$I/2 = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+3} - 2\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+3)^2} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$I_2 = +\frac{1}{6}\int_0^\infty \left(\frac{1}{t+j\sqrt{3}} - \frac{1}{t-j\sqrt{3}}\right)^2 dt$$

$$I_2 = +\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{t+j\sqrt{3}} - \frac{1}{t-j\sqrt{3}}\right]_0^\infty - \frac{1}{3}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Ahora bien, el corchete anterior es nulo.

$$\frac{I}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{18}$$

$$I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}. \qquad \text{c.q.d.}$$

CAPITULO IX

INTEGRACIONES POR DESARROLLO

9-1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$\sqrt{x}e^x = x^{1/2} + x^{3/2} + \frac{1}{2}\cdot x^{5/2} + \frac{1}{6}\cdot x^{7/2} + \ldots$$

$$I = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{7}x^{7/2} + \frac{1}{27}x^{9/2}$$

$$I = \sqrt{x}\left(\frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \frac{x^5}{25} + \ldots\right) + C.$$

Comprobamos que la serie a integrar es bien convergente.

$$u_n = \frac{1}{n + \frac{3}{2}}\cdot\frac{x^{n+3/2}}{n!} = x\sqrt{x}\cdot\frac{2}{2n+3}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\frac{(2n+3)}{(2n+5)}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{2n+3}{2n+5};$$

esta relación $\to 0$ si $n \to \infty$.

9-3. $$I = x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^5}{45} + \frac{5}{567}x^7 - \ldots + C.$$

Observar que es preciso que $x^2 < 1$ para que haya convergencia.

9-4. $$I = \int_0^1 \operatorname{sen} u \qquad \text{con} \qquad u = \frac{\pi x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{\pi x^3}{6} - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{2^3}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{2^5}\cdot\frac{x^{11}}{11} - \ldots\right]_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{2^3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{2^5}\cdot\frac{1}{11} - \ldots$$

Integrales equívocas

9-5. Esta integral converge, pues el denominador se comporta como $\sqrt{3-x}$ cuando $x \to 3$.

$$I = \left[\text{arc sen } \frac{x}{3}\right]_0^3 = \text{arc sen } 1 - \text{arc sen } 0$$

$$I = \pi/2.$$

9-6. Si se pone

$$2 - x = v, \qquad I = -\int \frac{dv}{v} = -\ln v$$

$$I = [-\ln|2-x|]_0^2 = -\ln 0 - \ln 2 = +\infty - K = +\infty.$$

La integral es divergente.

9-7. Si se traza la curva, se ve que la asíntota $x = +1$ es el centro de simetría. Por consiguiente las dos superficies rayadas se cortan.

$$I = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^4 = \left|-\frac{1}{x-1}\right|_0^1 + \left|-\frac{1}{x-1}\right|_1^4$$

$$I = -\infty + \infty$$

$$|I| = \infty.$$

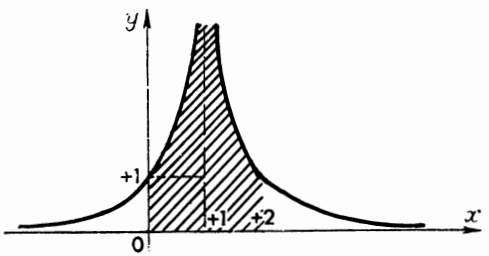


FIG. 9-7

9-8. $I = 3/2(\sqrt[3]{9} - 1)$.

9-9. $I = \pi/2$.

9-10. La integral propuesta converge debido a e^{-x}.

Debe integrarse por partes. Se obtiene:

$$2I = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\operatorname{sen} x$$

$$I = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\right]_0^{\infty} \qquad I = 1/2.$$

9-11. $I = +2$.

9-12. $I = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^4 = 4 - 4, \quad I = 0, \quad$ pero $\quad |I| = 8.$

9-14. Primeramente $1/x^n$ converge, para $x = 0$, si $n < 1$.

Si $n \geqslant 1$, la integral no tiene sentido.

$$I = \int_{-1}^{+1} x^{-n}\,dx = \frac{1}{1-n}\left[x^{1-n}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{1-n}\left[1^{1-n} - (-1)^{1-n}\right].$$

La integral no tiene sentido más que si n es *entero*.

Si $n = 0, \quad I = 2$

Si $n < 0, \quad$ ponemos $n = -p, \quad p$ entero > 0.

$$I = \int_{-1}^{+1} x^p\,dx = \frac{1}{p+1}\left(x^{p+1}\right)_{-1}^{+1} = \frac{1}{p+1}\left[1 - (-1)^{p+1}\right].$$

Integrales definidas

9-15. $I = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}.$

$$I = 2.$$

9-16. Es preciso poner $3 - 2x = v$.

$$I = [-\sqrt{v}]_0^1 = [-\sqrt{3-2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

$$I = 0{,}732.$$

9-17. $I = \frac{\pi}{2ab}$.

9-18. Poner $1 - x^2 = v, \quad x\,dx = -\frac{1}{2}\,dv, \quad I = +1.$

9-19. $I = 0{,}414.$

9-20. La función es divergente y se comporta como $1/x$, $I = +\infty$.

9-21. Esta integral se ha calculado en el número **7-7.** Cuando $x \to 0$ se comporta como

$$\int \frac{dx}{x} \quad I = +\infty.$$

9-22. $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + 3/4 \equiv u^2 + K^2$.

Ponemos $u = x - \dfrac{1}{2} \qquad K = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

9-24. $I = 1 - \ln 2$.

Observar que para $x = \infty \quad 1 + x \approx x$.

9-25. Solución de esta integral núm. 34 del curso, ejemplo 1.°:

$$I = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + 0 - \left(0 + \frac{0}{2} \right)$$

$$I = \pi/4.$$

9-26. La integral puede escribirse:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = \left[\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$I = \pi.$$

9-27. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$.

$s_1 = \operatorname{sen} \theta \quad$ de $\quad 0$ a $\pi/2$

$s_2 = \cos \theta \quad$ de $\quad 0$ a $\pi/2$

$s_1 = s_2 \quad$ y $\quad s_1^2 = s_2^2$.

Por consiguiente $I = \int s_1^2 - s_2^2 = 0 \quad I = 0.$

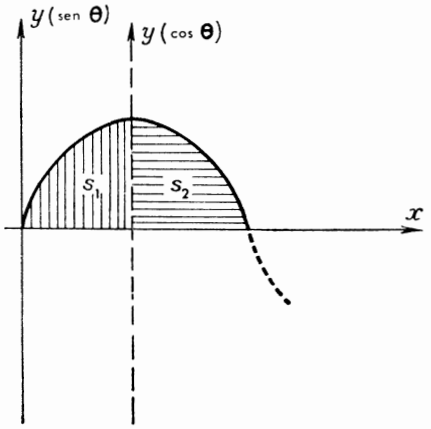


FIG. 9-27

9-28. Poner $\cos\theta = u$, ya que $-\operatorname{sen}\theta\, d\theta = du$.

$$I = -\operatorname{arc\,tg} u, \qquad I = \pi/4.$$

9-29. $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$.

9-30. La solución de esta integral está en el curso núm. 36, ejemplo 3.°.

$$I = \left[-\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\theta/2}\right]_0^{\pi/2}, \qquad I = 1.$$

9-31. El cálculo es idéntico al del núm. **5-7**, haciendo $n = 1$.

$$I = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x - \tfrac{1}{2})\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(0 - \tfrac{1}{2}) - [0(-\infty - \tfrac{1}{2})].$$

Ahora bien, x^2 varía mucho más deprisa que $\ln x$ cuando $x \to 0$,

$$I = -1/4 - 0, \qquad I = -1/4.$$

9-32. Solución en el curso núm. 19, ejemplo 7.°.

$$I = [x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}]_0^1 = \operatorname{arc\,sen} 1 - 1$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1.$$

9-33. $I = -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\, d\theta.$

Integrando por partes:

$$I = [-\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2}$$

$$I = 1.$$

9-35. $I = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{\infty}, \qquad I = +1.$

9-36. Ponemos $x - 1 = v$; v variará por consiguiente de -1 a $+1$.

$I = \left[-\frac{1}{v}\right]_{-1}^{+1}$ para $v = 0$ hay discontinuidad

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left| -\frac{1}{v} \right|_{-1}^{-\varepsilon} + \left| -\frac{1}{v} \right|_{+\varepsilon}^{1} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \left(\frac{2}{\varepsilon} - 2\right) \to \infty - 2 = +\infty$$

$$I = +\infty.$$

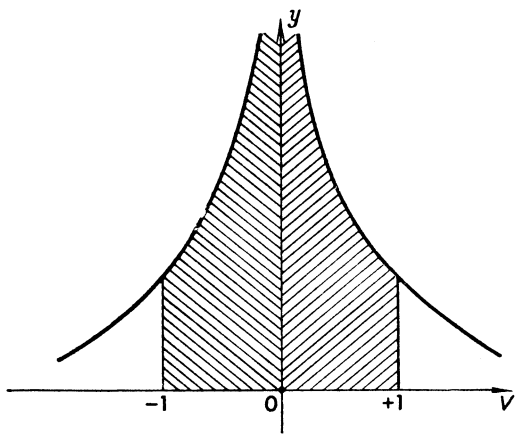


FIG. 9-36

9-37. $I = 6 - 3/2 = 4.5.$

9-38. Es preciso hacer la división

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = D;$$

$$D = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$$

$$I = \left[\frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1.$$

9-39. También es preciso hacer la división.

$$I = \frac{8}{3} - \ln 3.$$

9-40. Trazando la curva, se ve ya que:

$$I = 0$$

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \left[-\ln|\cos\theta|\right]_{-\pi/4}^{+\pi/4}$$

$$I = -\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \qquad I = 0.$$

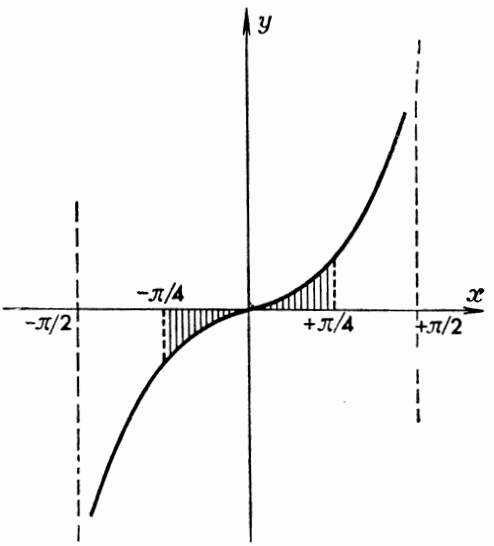


FIG. 9-40

9-41. $I = \left[\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$$I = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right), \qquad I = \pi.$$

9-43. Poner $v = bx/a$:

$$I = \frac{1}{ab}\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{ab}\,[\operatorname{arc\,tg} v]_0^{\infty}$$

$$I = \frac{1}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right], \qquad I = \frac{\pi}{2ab}.$$

9-44. $I = \frac{1}{2}\ln 2{,}5$.

9-45. Esta integral se calcula en el curso, núm. 40, primer procedimiento.

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

9-46. La integral puede escribirse:

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x(a+b) - ab}}.$$

Ahora bien:

$$-x^2 + x(a+b) - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left[\frac{2x-(a+b)}{2}\right]^2$$

$$I = \left[\operatorname{ar\,sen}\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)\right]_a^b = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{b-a}{a-b}\right) - \operatorname{arc\,sen} 1$$

$$I = -2\operatorname{arc\,sen} 1 = -2\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I = -\pi.$$

9-47. $I = [\operatorname{tg}\theta - \theta]_0^{\pi/2}, \qquad I = \infty.$

9-48. Es preciso integrar por partes dos veces seguidas.

$$I = [\operatorname{sen}\theta(\theta^2 - 2) + 2\theta\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

9-50. La integral puede escribirse:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Ahora bien $\dfrac{x^2}{1+x^2} \equiv A\dfrac{Mx+N}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$

$$I = [2\operatorname{arc\,tg} x - x]_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1.$$

9-51. $I = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^5}{5} + \frac{3x^6}{6} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1$

$I = \frac{1}{140}.$

9-52. Poner $x = \operatorname{sen} \varphi$.

Referirse a los cálculos hechos en el curso, núm. 39, en la «Nota». Si x varía desde 0 a 1, φ varía desde 0 a $\pi/2$:

$$I = \left[-\cos\varphi - \frac{1}{5}\cos^5\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$I = 8/15.$

9-53. Poner: $x = \frac{\pi}{2} - u$

$$I = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos u)\, du = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\, du.$$

Se puede cambiar el nombre de la variable de integración y volver a x

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx.$$

Es igual a la semisuma de dos expresiones

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\operatorname{sen} x) + \ln(\cos x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) dx.$$

Pongamos

$$2x = v$$

$$2\, dx = dv$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} v}{2}\right) dv = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} v)\, dv - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} v)\, dv + \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\operatorname{sen} v)\, dv - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

$$\frac{3I}{4} = \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\operatorname{sen} v)\, dv - \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

Pongamos: $u = \pi - v$,

$$\frac{3I}{4} = -\frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{0} \ln(\operatorname{sen} u)\, du - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

$$\frac{3I}{4} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} u)\, du - \frac{\pi}{4}\ln 2,$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

9-54. $I = 2\pi/\sqrt{3}$.

9-55. Poner: $x = u^4$

de donde: $u = x^{1/4}$ $u^2 = x^{1/2}$ $u^3 = x^{3/4}$

$$I = 4\int_0^2 u^2\, du - 4\int_0^2 du + 4\int_0^2 \frac{du}{1+u^2}$$

$$I = 4\left(\frac{2}{3} + \operatorname{arc\,tg} 2\right).$$

9-56. $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^2 \cdot \cos\theta\, d\theta$

$$I = \left[\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$I = 8/15$.

9-57. Los mismos cálculos que en la segunda parte del ejercicio núm. **9-68.**

9-58. Poniendo $\operatorname{sen}\theta = u$, u variará de 0 a 1.

$$I = \left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}\right]_0^1 \qquad I = 1/24.$$

9-59. Iguales principios de cálculo que en el núm. **9-56.**

$$I = 4/15$$

9-60. Observar que aquí se trata de una función impar en la que los límites son simétricos en relación a 0. La integral será nula, por consiguiente.

9-61. La integral se escribirá:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta.$$

Ahora bien:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad I = 8\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta - 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta$$

$$I = \left[4\operatorname{sen}\theta - \frac{8}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = 4/3.$$

9-62. Cálculos hechos en el curso, núm. 42, ejemplo 4.°.

$$I = \pi/2.$$

9-63. Poner:

$$\sqrt[3]{x^2(1-x)} = u \cdot x.$$

De donde:

$$u^3x^3 = x^2 - x^3 \qquad u^3x = 1 - x \qquad x = \frac{1}{1+u^3}.$$

Calculamos dx:

$$dx = -\frac{3u^2\,du}{(1+u^3)^2}.$$

Por otra parte para $x = 0$, $u = +\infty$; para $x = 1$, $u = 0$.

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{-3u^2\,du}{(1+u^3)^2 \cdot \dfrac{u}{1+u^3}} = 3\int_0^{+\infty} \frac{u\,du}{1+u^3}$$

$$\frac{u}{1+u^3} \equiv \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+D}{1-u+u^2} \qquad \text{sea: } A = -1/3 \quad \text{y} \quad B = D + 1/3$$

$$I = -\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u} + \int_0^{\infty} \frac{(u+1)}{u^2-u+1}\,du$$

$$I = -\left[\ln|1+u|\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left[\ln|u^2-u+1|\right]_0^{\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2-u+1}$$

Esta última integral se calcula haciendo hincapié en que

$$u^2 - u + 1 = (u - 1/2)^2 + 3/4.$$

$$I = \ln\left[\frac{\sqrt{u^2-u+1}}{1+u}\right]_0^{\infty} + \sqrt{3}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$I = 2\pi/\sqrt{3}.$$

9-65. Poner $x = \operatorname{sen}\varphi$, después $z = \operatorname{tg}/2$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{2+\cos\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^1 \frac{1-z^2}{(1+z^2)(3+z^2)}\,dz.$$

Ahora bien: $\dfrac{1-z^2}{(1+z^2)(z^2+3)} \equiv \dfrac{Az+B}{z^2+1} + \dfrac{Cz+D}{z^2+3}$

$$A = C = 0 \quad \text{y} \quad B = 1, \quad D = -2.$$

$$I = 2\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} - 4\int_0^1 \frac{dz}{z^2+3}$$

$$I = 2\left[\operatorname{arc\,tg} z\right]_0^1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} - \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$I = \pi\cdot\frac{3\sqrt{3}-4}{6\sqrt{3}}.$$

9-66. $I = \pi/16$.

9-67. Referirse al núm. 40 del curso y a la integral $\cos^6 x\,dx$ caculada en el número siguiente.

$$I = \frac{\pi}{32}.$$

9-68. Haciendo el cambio de variable propuesto, se tiene:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1+\operatorname{tg}^2 u)^3} = \int_0^{\pi/2} \cos^6 u\,du \quad \text{ya que} \quad \cos^2 u = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}$$

Ahora bien: $\cos x = \dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$.

Los coeficientes para la potencia 6 vienen dados por el triángulo de Pascal.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Calculemos el desarrollo de $\left(\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\right)^6$

$$\cos^6 x = \frac{1}{64}\,(e^{6jx} + 6e^{5jx}\cdot e^{-jx} + 15e^{4jx}\cdot e^{-2jx} + 20e^{3jx}\cdot e^{-3jx} + 15e^{2jx}\cdot e^{-4jx} + 6e^{jx}\cdot e^{-5jx} + e^{-6jx})$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{64}\,[e^{6jx} + e^{-6jx} + 6(e^{4jx} + e^{-4jx}) + 15(e^{2jx} + e^{-2jx}) + 20]$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\,(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

$$I = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \frac{6}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{15}{2}\operatorname{sen} 2x + 10x\right)_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{5\pi}{32}.$$

9-70. La integral puede escribirse:

$$I = \int_{-1}^{+1} (\sqrt{x^2+1} - x)\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{x^2+1}\,dx - \int_{-1}^{+1} x\,dx = I_1 + I_2.$$

Considerando el núm. 25 del curso:

$$I_1 = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}|\right]_{-1}^{+1}$$

$$I_2 = \left[-\frac{x^2}{x}\right]_{-1}^{+1}$$

$$I = \left[\frac{x}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}|\right]_{-1}^{+1}$$

$$I = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\,[\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)]$$

$$I = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1).$$

9-71. $I = \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

9-72. Poner $t = \operatorname{tg} x/2$ variando desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2+2t+3}.$$

Ahora bien: $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2$.

$$I = \sqrt{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$I = \pi\sqrt{2}.$$

9-74. Con el cambio de variable propuesto:

$$\operatorname{cosec}^4 x = \frac{1}{16}\left[u + \frac{1}{u} + 4\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) + 6\right]$$

$$\sec^4 x = \frac{1}{16}\left[u + \frac{1}{u} - 4\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) + 6\right]$$

$$\operatorname{cosec}^4 x + \sec^4 x = \frac{1}{8}\left(u + \frac{1}{u} + 6\right)$$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{4}\,\frac{du}{u}}{\frac{1}{8}\left(u + \frac{1}{u} + 6\right)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 6u + 1}.$$

Ahora bien: $u^2 + 6u + 1 = (u + 3)^2 - 8.$

Se pondrá $v = \dfrac{u + 3}{2\sqrt{2}}$.

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dv}{v^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dv}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\infty} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{2\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ln(\sqrt{2}+1).$$

9-75. $I = 10/9.$

9-76. $I. = \int_1^8 dx + \int_1^8 x^{1/3}\,dx$

$I = [x + 3/4\,x^{4/3}]_1^8 \qquad I = 73/4.$

9-77. Poner $\operatorname{tg}\theta/2 = t$, t variará desde 0 a $\sqrt{3}$.

$$I = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{2}{3}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$I = \frac{\pi}{9}.$$

9-78. $I = 1 + \sqrt{3}$.

9-79. Es preciso poner $x = 1/u$. $dx = -du/u^2$.

$$I = -\int_{\infty}^{\sqrt{2}} \frac{du/u^2}{(1 + 2/u^2)\sqrt{1 + 1/u^2}} = -\int_{\infty}^{\sqrt{2}} \frac{u\,du}{(u^2 + 2)\sqrt{1 + u^2}}$$

Entonces poner $1 + u^2 = v^2$, variando v desde ∞ a $\sqrt{3}$.

$$I = -\int_{\infty}^{\sqrt{3}} \frac{v\,dv}{(v^2 + 1)\cdot v} = -\int_{\infty}^{\sqrt{3}} \frac{dv}{1 + v^2} = -[\operatorname{arc\,tg} v]_{\infty}^{\sqrt{3}}$$

$$I = -\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \qquad I = \frac{\pi}{6}.$$

9-80. Se pondrá $t = \operatorname{tg} x$.
Variando t desde 0 a ∞.

$$I = \frac{1}{13}\left(3 \ln \frac{3}{2} + \pi\right).$$

9-81. Descomponer en elementos simples

$$\frac{1}{(1 + x^2)(4 + x^2)} \equiv \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{Mx + N}{4 + x^2}$$

$$A = M = 0, \quad N = -1/3, \quad B = +1/3.$$

$$I = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arc\,tg} x\right]^{\infty} - \frac{1}{6}\left[\operatorname{arc\,tg} x/2\right]_0^{\infty}$$

$$I = \pi/12.$$

9-82. Primeramente poner $x = \operatorname{sen}\varphi$, variando φ desde $-\pi/2$ a $+\pi/2$, después poner $\operatorname{tg}\varphi/2 = t$, variando t desde -1 a $+1$.
Se obtendrá:

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{+1}$$

$$I = \pi/\sqrt{3}.$$

9-83. $I = \pi/2$.

9-85. Puede escribirse:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{sen}^5 x \cdot dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^7 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$I = -\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^6 x \cdot d(\cos x)}{\cos^2 x}$$

Ponemos $\cos x = u$, variando u de 1 a $\sqrt{2}/2$.

$$I = \int_1^{\sqrt{2}/2} \left(u^4 - 3u^2 + 3 - \frac{1}{u^2}\right) du$$

$$I = \left[\frac{u^5}{5} - u^3 + 3u + \frac{1}{u}\right]_1^{\sqrt{2}/2} \qquad I = \frac{91}{20\sqrt{2}}.$$

9-86. La integral de esta función par puede escribirse también:

$$I = 2\int_0^{\pi} \cos 3x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$I = \pi/4.$$

Nota. — Se puede llegar a este resultado poniendo primeramente $u = \pi - x$.

A continuación: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Se obtiene entonces:

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 3x + 3\cos x \cdot \cos 3x)\, dx,$$

$$I = 1/2\,[x + 1/6 \operatorname{sen} 6x + 3/4 \operatorname{sen} 4x + 3/2 \operatorname{sen} 2x]_0^{\pi/2}.$$

9-87. $I = \dfrac{2\ln 2 - 1}{4}$.

9-88. Es preciso poner

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \text{con} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

t variará desde 1 a $+\infty$:

$$I = 2\int_1^{\infty} \frac{dt}{2t^2} = \int_1^{\infty} t^{-2}\, dt$$

$$I = -\,[t^{-1}]_1^{\infty} \qquad I = +1.$$

9-89. Ejercicio tratado en el curso, núm. 36.

9-90. Haciendo el cambio de variable propuesto u variará desde 3 a 1.

$$I = -\int_3^1 \frac{(u^2 - 1)^{1/3}}{u} \cdot u^2\, du = \int_1^3 (u^2 - 1)^{1/3} \cdot u \cdot du.$$

Poner $v = u^2 - 1$, variando v de 0 a 8.

$$I = \int_0^8 v^{1/3}\, dv \qquad I = \frac{3}{8}[v^{4/3}]_0^8 \qquad I = 6.$$

9-91. Haciendo el cambio variable propuesto u variará desde 0 a 1.

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\, du}{u+1}.$$

Ponemos $u = \operatorname{tg}^2\varphi$, $du = 2\operatorname{tg}\varphi(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)\, d\varphi$,

variando entonces φ desde 0 a $\pi/4$.

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi$$

...integral cuya solución viene dada en el curso, núm. 14.

$$I = 2\,[\operatorname{tg}\varphi - \varphi]_0^{\pi/4} \qquad I = 2 - \pi/2.$$

9-92. Es preciso integrar por partes:

$$I = [x\,(\ln x - 1)]_0^1 \qquad \text{cuando } x \to 0 \qquad x \ln x \to 0$$

ya que los números varían más deprisa que sus logaritmos.

$$I = -1.$$

9-93. Puede escribirse:

$$1 - x^3 = (x-1)(-x^2 - x - 1)$$

$$\frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Ahora bien: $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$.

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Integrales a verificar

9-95. Poniendo $1 + x = v$. v varía desde 4 a 9.

$$I = \int_4^9 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2[\sqrt{v}]_4^9 = 2(3-2) = 2. \qquad \text{c.q.d.}$$

9-96. Poner $2 - 5x = v$, v varía desde -8 a 27.
Vuelve a obtenerse $I = +9$.

9-97. Poner $9 - 5 \operatorname{sen} 2x = v$, $dv = -10 \cos 2x\, dx$, v varía desde 1 4 a 4

$$I = \frac{7}{10}\int_{14}^{4} v^{-1/2}\, dv = -\frac{7}{10} \cdot 2[\sqrt{v}]_{14}^{4} = -\frac{7}{5}(2 - \sqrt{14})$$

$$I = \frac{7}{5}(\sqrt{14} - 2). \qquad \text{c.q.d.}$$

9-98. $$I = \frac{1}{3}\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx/3}{1 + (x/3)^2} = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6}, \qquad I = \frac{\pi}{18} \qquad \text{c.q.d.}$$

9-99. $x^2 - 6x + 18 = (x-3)^2 + 9$.

$$I = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-3}{3}\right)\right]_{3}^{6} = \frac{1}{3}[\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0]$$

$$I = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \qquad I = \frac{\pi}{12} \ldots \text{ y no } \frac{\pi}{4}.$$

9-100. Se sabe que $\operatorname{sen}^3 a = 3/4 \operatorname{sen} a - 1/4 \operatorname{sen} 3a$:

$$I = \frac{3}{4}\int_{3}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x \cdot 2\frac{dx}{2} - \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen} 6x \cdot \frac{6\, dx}{6}$$

$$I = -\frac{3}{8}\left[\cos 2x\right]_{0}^{\pi/4} + \frac{1}{24}\left[\cos 6x\right]_{0}^{\pi/4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{3}.$$

9-101. La integral puede escribirse:

$$I = \frac{8a^3}{2a}\int_{0}^{\infty} \frac{dx/2a}{1 + (x/2a)^2} = 4a^2\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2a}\right)\right]_{0}^{\infty} = 2\pi a^2$$

9-102. Haciendo el cambio de variable propuesto se tiene:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{2\, dt(1 + t^2)}{(3 + t^2)^2} = \int_{0}^{1} \frac{2\, dt(1 + t^2)}{(3 + t^2)^2} - \int_{0}^{1} \frac{4\, dt}{(3 + t^2)^2} = I_{(1)} - I_{(2)}$$

$$I_{(1)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad I_{(2)} \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$I = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \frac{1}{6} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{6} \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-103. Poniendo $\operatorname{sen}^2 u = x$, u varía desde 0 a $\pi/2$:

$$I = -\int_0^{\pi/2} \cot u \cdot 2 \operatorname{sen} u \cdot \cos u \, du = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \cdot du$$

$$I = [u + 1/2 \operatorname{sen} 2u]_0^{\pi/2} = \pi/2 \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-104. La integral propuesta puede escribirse:

$$I = -\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4\cos x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{5 + 4\cos x}$$

Para la segunda se pone $u = \pi - x$.

$$I = -\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4\cos x} - \int_{\pi/2}^{0} \frac{du}{5 - 4\cos u}$$

$$I = -\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4\cos x} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 4\cos x} \ldots$$

...en lugar de u, si se quiere, ya que la variable de integración no tiene de ...

$$I = -\int_0^{\pi/2} \frac{10\,dx}{25 - 16\cos^2 x}.$$

Multiplicando numerador y denominador por la cantidad conjugada del denominador, y poniendo

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}.$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{10\,dt}{(1 + t^2)(25 - 16)} = 10\int_0^{\infty} \frac{dt}{25t^2 - 9} = \frac{2}{3}\int_0^{\infty} \frac{d(5t/3)}{1 + (5t/3)^2}$$

$$I = \frac{2}{3}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5t}{3}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047. \qquad \text{c.q.d.}$$

9-105. Problema igual del núm. **9-29.**

9-106. Es preciso integrar dos veces por partes

$$I = [x^2 \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$I = \pi - 2 = 1{,}14 \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-108. Si se cambia x por $(-x)$, $\cos^2(\pi - x) \equiv \cos^2 x$.

Por consiguiente, se puede escribir, dada esta simetría:

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Poner $\operatorname{tg} x = t$, variando t desde 0 $+\infty$:

$$1+\cos^2 x = \frac{2+t^2}{1+t^2}.$$

$$I = -\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\right)} = \sqrt{2}\int_0^{\infty} \frac{d(t/\sqrt{2})}{1+(t/\sqrt{2})^2}$$

$$I = \sqrt{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-109 y 9-110. Estos dos ejercicios pueden resolverse a la vez,

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x\, dx, \qquad B = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$$

y

$$B + jA = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{jx}\, dx = \frac{1}{j-1}\left[e^{(j-1)}\right]_0^{\infty}$$

$$B + jA = -\frac{1}{j-1} = \frac{1}{1-j} = \frac{1+j}{2}.$$

Identificando las partes reales entre sí y las imaginarias también entre sí,

$$A = B = 1/2.$$

Nota. — La respuesta 3/13 es imposible.

9-111. Poner, como en el ejercicio anterior,

$$A = \int e^{ax} \cdot \operatorname{sen} ax \cdot dx$$

$$B = \int e^{ax} \cdot \cos ax \cdot dx.$$

Calcular $B + jA$. Integrar, después de identificar. Se obtiene:

$$A + B = \frac{e^{ax}}{2a} \cdot 2 \operatorname{sen} ax = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \operatorname{sen} ax \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-112. Aplicar a los límites la solución del problema núm. **8-5.**

9-114. Poner $\sqrt{x} = u$. Se obtiene un arc tg.

9-115. Poner $\sqrt{1+x} = u$, $dx = 2u\,du$, entonces u varía desde 1 a 2:

$$I = \int_1^2 (u^2 - 1)u \cdot 2u\,du = 2\int_1^2 (u^4 - u^2)\,du$$

$$I = \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^2 = 2\left(\frac{12}{5} - \frac{8}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{116}{15} \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

9-116. Poner $1 + x = u^2$, u varía desde 0 a $\sqrt{3}$:

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(u/3)}{1 + (u/3)^2} = \frac{2}{3}\left[\text{arc tg}\,\frac{u}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9} \ldots \text{ c.q.d.}$$

9-117. Poner $x = 1/4$, dx, $dx = -du/u^2$:

$$I = -\int \frac{du}{u^2 \cdot \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{4}{u} - 4}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1 + 4u - 4u^2}}$$

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{2 - (2u-1)^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{2u-1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$I = -\frac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right) + C.$$

Nota. — *La respuesta* arc tg $(2 \text{ tg } x/2)$ es falsa.

9-118. Poner $x = 1/y$; $\quad dx = -dy/y^2$:

$$I = \frac{1}{3}\int (1 + 3y)^{-3/2} \cdot d(1 + 3y)$$

$$= -\frac{1}{3}(-2)(1 + 3y)^{1/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 3/x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}}. \quad \text{c.q.d.}$$

9-119. Poner $1 + x = u$, u varía desde 4 a 9.

$$I = \int_4^9 \sqrt{u}\, du - \int_4^9 \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$I = [2/3\, u^{3/2}]_4^9 - 2[\sqrt{u}]_4^9 = 2/3\, [9^{3/2} - 4^{3/2}] - 2[3 - 2]$

$I = 32/3 = 10{,}7 \neq 10^{2/3}$

...la respuesta dada es, por consiguiente, falsa.

9-120. Poner $x = 4 \operatorname{sen} \varphi$.

Se obtiene:

$I = \int_0^{\pi/2} 16 \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi$, que es fácil de integrar.

9-121. Ejercicio idéntico al del núm. **9-26.**

9-122. Es más fácil de integrar $9 + x^2 = u$, u varía entonces desde 9 a 25.

Se obtiene:

$I = 1/4\, [(u \ln u)_9^{25} - (u)_9^{25}]$.

Nota. — No olvidar que

$$\ln u = \lg u \times \frac{1}{0{,}43}.$$

Se obtiene el resultado anunciado.

9-123. Poner $x = 1/y$.

$$I = \frac{1}{5} \int_{1/4}^{1/3} \frac{d\,(5y)}{\sqrt{(5y)^2 - 1}} = \frac{1}{5} \left[\ln \left| 5y + \sqrt{25y^2 - 1} \right| \right]_{1/4}^{1/3}$$

$$I = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{\frac{5+4}{3}}{\frac{5+3}{4}} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{9}{3} \cdot \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}. \qquad \text{c.q.d.}$$

9-124. Poner $x = \operatorname{sen} u$; u varía desde 0 a $\pi/2$.

$$I = 1/4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2u \cdot du = 1/8 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 u\, du = 1/4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u \cdot du$$

$$I = 1/8 \left[u - 1/2 \operatorname{sen} 2u \right]_0^{\pi/2} = \pi/16 \qquad \text{c.q.d.}$$

9-125. Llamamos B a la integral propuesta y

$$A = \int_0^{-\infty} x^2 \cdot e^x \cdot \cos x \, dx.$$

$$A + jB = \int_0^{-\infty} x^2 \cdot e^{(1+j)x} \cdot dx$$

$$A + jB = \left[\frac{1}{1+j} \cdot x^2 \cdot e^{(1+j)x}\right]_0^{-\infty} - \frac{1}{1+j}\int_0^{-\infty} 2x\, e^{(1+j)x} \cdot dx$$

$$A + jB = -\frac{2}{1+j}\left\{\left[\frac{1}{1+j} \cdot x \cdot e^{(1+j)x}\right]_0^{-\infty} - \frac{1}{1+j}\int_0^{-\infty} e^{(1+j)x} \cdot dx\right\}$$

siendo nulo el corchete,

$$A + jB = -\frac{2}{(1+j)^3} = -\frac{1}{4}(1 - 3j - 3 + j) = \frac{1+j}{2}$$

Identificando

$$A = B = 1/2 \ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

9-126. Poner $x = 2 \operatorname{sen} \varphi$, variando φ desde $\pi/6$ a $\pi/3$. Se obtiene:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 \varphi \, d\varphi.$$

Esta integral ha sido ya calculada en el núm. **9-47.** Entonces se obtiene fácilmente la respuesta.

9-127. Poner $x = 1/y$: $dx = -dy/y^2$.

$$I = -\int_1^{1/2} \sqrt{10y - 1} \cdot dy$$

Poner $10y - 1 = v$, v variará desde 9 a 4.

$$I = -\frac{1}{10}\int_9^4 \sqrt{v}\, dv = \frac{1}{10}\int_4^9 \sqrt{v}\, dv = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3}\left[v^{3/2}\right]_4^9$$

$$I = \frac{1}{15}[9^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{1}{15}(27 - 8) = \frac{19}{15}. \qquad \text{c.q.d.}$$

CAPITULO XI

CALCULO DE SUPERFICIES

11-1. Es preciso calcular las coordenadas de los puntos A y B.
$y = 1/x$, por consiguiente: $3x^2 - 11x + 4 = 0$.

Sean:
$x_A = 0{,}41$, $y_A = 2{,}44$; $x_B = 3{,}25$, $y_B = 0{,}3$.

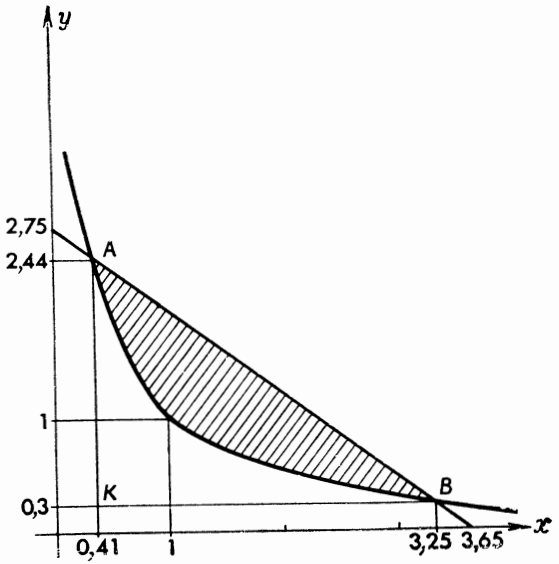


FIG. 11-1

$S = S_1 - S_2$

Nota: A S_1 añadir la superficie del rectángulo de altura KB y cuyo valor es 0,852.

S_1 = Superficie del triángulo AKB =
$= \frac{1}{2}(3{,}25 - 0{,}41)(2{,}44 - 0{,}3) = 3{,}07 + 0{,}852.$

$$S_2 = \int_{0,41}^{3,25} y\,dx = \int_{0,41}^{3,25} \frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{0,41}^{3,25} = \ln\frac{3{,}25}{0{,}41} = \ln 7{,}92.$$

Ahora bien, $\ln 7{,}92 = \lg 7{,}92 \times \dfrac{1}{0{,}43} = \dfrac{0{,}9}{0{,}43} = 2{,}09 = S_2$.

$$S = 3{,}922 - 2{,}09 \approx 1{,}832.$$

11-3. Trazamos primeramente la curva $y = f(x)$.

x	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$ 3	$\nearrow$ 3,47	$\searrow$ 0

Por consiguiente la superficie es enteramente > 0 de $Oa' + 4$

$$S = \int_0^4 y\,dx = 12\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 3}$$

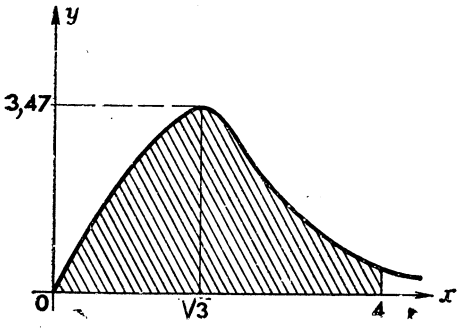


FIG. 11-3

Se pondrá $u = x^2 + 3$, variando u entonces desde 3 a 19.

$$S = 6\,[\ln u]_3^{19} = 6 \times \ln 6{,}33$$

$$S = 6 \cdot \frac{0{,}802}{0{,}43} \approx 11 \qquad S \approx 11.$$

11-4. Llamamos x_0 a la abscisa del punto A.

$$S = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_0}{2}\right) - \frac{x_0^2}{8}$$

Aquí $x_0/2 \approx 1{,}375$, $\qquad S \approx 2{,}835$.

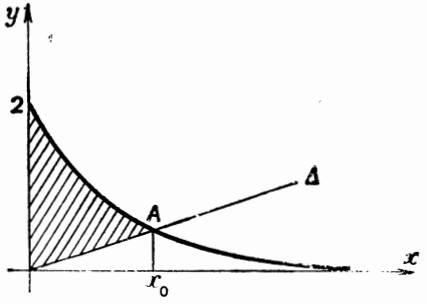


FIG. 11-4

11-5. Puede escribirse:

$$S = 2\left\{ \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2\, d\theta + \tfrac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3\cos\theta)^2\, d\theta \right\}.$$

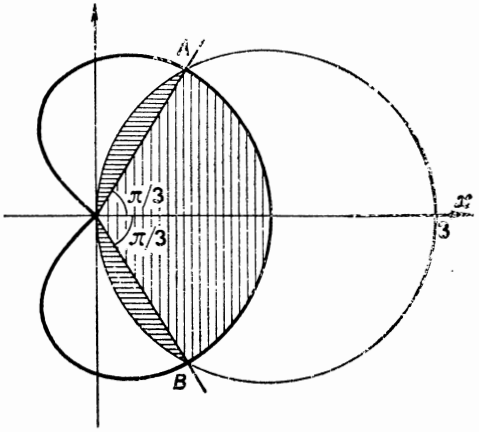


FIG. 11-5

Desarrollándola, se llega a:

$$S = \left[\ \theta\ \right]_0^{\pi/3} + 2\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/3} + \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/3} + 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$S = 5\pi/4.$$

11-6. $S = \pi a^2/4$.

11-8. $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (a\cos\theta + b)^2\, d\theta$

$$S = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{b^2}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi} + ab\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}.$$

Siendo nulo el último corchete:

$$S = \pi(b^2 + a^2/2).$$

11-9. Siendo la abscisa del punto de encuentro de las dos curvas $x_0 \approx 3{,}2$,

$$S = 2/3\, x_0^{3/2} - 0{,}217\,5(x_0 - 1)^{5/2}$$

$$S \approx 2{,}26.$$

11-10. Abscisa del punto A

$$4\sqrt{4 - x} = 4 - x, \qquad x = -12$$

$$S = \int_{-12}^{+4} \sqrt{4 - x}\, dx - 1/4 \int_{-12}^{+4} (4 - x)\, dx$$

Se pondrá $v = 4 - x$, variando v desde 16 a 0.

$$S = 32/3.$$

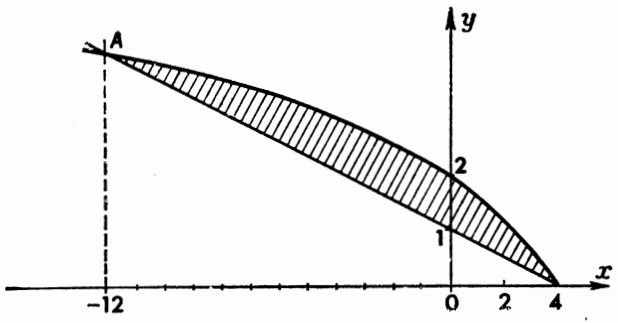


FIG. 11-10

11-11. $S = 3\pi a^2/8$.

11-12. $S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \rho^2\, d\theta = \int_0^{+\pi/4} \rho^2\, d\theta$. Ahora bien: $\rho^2\, 4\cos^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 4$

$$S = 4\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{tg}\theta - 4\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$S = 5 - \frac{7\pi}{2}$$

11-13. $S = 64/3$.

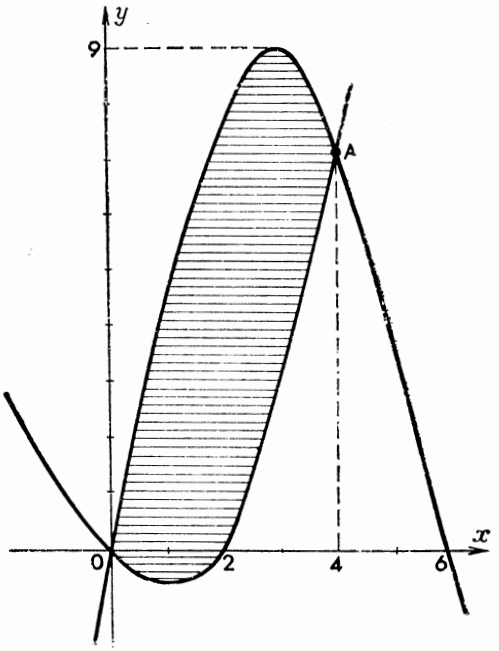


FIG. 11-13

11-14. $S = 4\int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

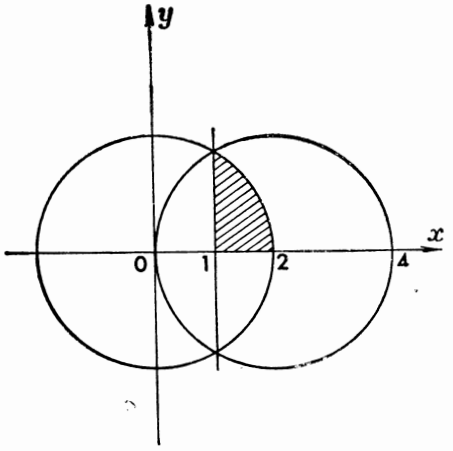


FIG. 11-14

Ponemos $x = 2 \operatorname{sen} \varphi \quad dx = 2 \cos \varphi \, d\varphi$

$$S = 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \cos \varphi \cdot 2 \cos \varphi \, d\varphi = 16 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$S = 8 \left[\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$S = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

11-15. $S = 2 \int_{-4}^{0} x^2 \sqrt{4 + x}.$

poner $4 + x = u$, variando u desde 0 a 4.

$$S = 39.$$

11-16. $S = 2 + \pi/4.$

11-17. Es preciso calcular las abscisas de los dos puntos comunes a las dos curvas

$$y^4 - 4y^2 + 1 = 0,$$

poner $y^4 = X^2, \quad X = 2 \pm \sqrt{3}, \quad y = \pm \sqrt{\pm \sqrt{3}}.$

Se obtiene: $x_1 = 0.51, \quad x_2 = 1{,}96.$

(estos valores no se dan aquí con gran precisión).

$$S = \int_{0,51}^{1,96} \sqrt{4 - x^2} \, dx - \int_{0,51}^{1,96} \frac{dx}{x}$$

$$S = \left[2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} - \ln x \right]_{0,51}^{1,96}$$

$$S \approx 0{,}67.$$

Observar que, por ejemplo

$$2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1{,}96}{2} = 2 \operatorname{arc\,sen} 0{,}98$$

$$= 2 \cdot 78^\circ 40' = 2 \cdot 78^\circ{,}666 = \frac{2 \cdot 78{,}666}{57} \text{ radianes}$$

$$= 2{,}76.$$

CAPITULO XIII

CALCULO DE LONGITUDES DE CURVAS

13-1. $l = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$

$$y' = \operatorname{sec} \frac{x}{C} \quad l = C \int \sqrt{1 + \operatorname{sec}^2 \frac{x}{C}} \frac{dx}{C} = C \operatorname{sec} \frac{x}{C},$$

$$l = \frac{C}{2} (e^{x/c} - e^{-x/c}).$$

13-2. $l = 12.$

13-3. $y' = \dfrac{x}{2a} \qquad y'^2 = \dfrac{x^2}{4a^2}$

$$l = \int_{-l}^{+l} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}}\, dx = 2 \int_0^{+l} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \int_0^{+l} \sqrt{4a^2 + x^2}\, dx$$

$$l = \frac{1}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{4a^2 + x^2} + 2a^2 \cdot \ln (x + \sqrt{4a^2 + x^2}) \right]_0^{+l}$$

$$l = \frac{l}{2a} \sqrt{4a^2 + l^2} + 2a \ln \left| \frac{l + \sqrt{4a^2 + l^2}}{2a} \right|.$$

13-4. Aquí $y' = x$; poner $\sec \varphi$, φ variará desde 0 a 0,892

$$(\text{ya que } \varphi = \ln | x + \sqrt{1 + x^2} |).$$

Observar que $\sec x = x + \dfrac{x^3}{3!}$. Por consiguiente:

$$\sec 1{,}785 = 2{,}735 \qquad l = 1{,}13.$$

13-5. $\rho' = 2R \cos \theta$

$$l = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4R^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4R^2 \cos^2 \theta}\, d\theta \qquad l = 2\pi R.$$

13-6. Se escribe:

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + 9x/4}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4 + 9x}\, dx;$$

ponemos $4 + 9x = v$, variando v desde 4 a 49.

$$l = \frac{1}{27}\left[v^{3/2}\right]_4^{49}, \quad l = \frac{1}{27}(7^3 - 2^3)$$

$$l = 12{,}4.$$

13-8. $l = \int_0^4 \sqrt{4\theta^2 + 9\theta^4}\, d\theta = \int_0^4 \sqrt{4 + 9\theta^2} \cdot \theta\, d\theta$

Poner $u = 4 + 9\theta^2$, variando u desde 4 hasta 148.

$$l = \frac{1}{18}\int_4^{148} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{27}[148^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{1}{27}(1.800 - 8)$$

$$l \approx 66{,}4.$$

13-9. Aquí θ debe variar dos veces desde 0 a 2π para tener toda la longitud.

$$l = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho^2 + \rho'^2)}\, d\theta = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^3 \theta/4}\, d\theta.$$

Poner $\theta/4 = u$, variando u desde 0 a $\pi/2$ $\quad d\theta = 4\, du$

$$l = 8a[\operatorname{sen} u - 1/3 \operatorname{sen}^3 u]_0^{\pi/2}$$

$$l = 16a/3.$$

13-10. $l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx.$

Pongamos $1/x = \operatorname{tg}^2 u$, $u = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1/x}$ varía desde $\pi/2$ a $\pi/4$,

$$dx = -2\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^3 u}\, du, \quad l = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen} u}.$$

Ahora bien

$$d(\cot u) = d\left(\frac{1}{\operatorname{tg} u}\right) = -\frac{du}{\operatorname{sen}^2 u}.$$

Por consiguiente:

$$l = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\cot u)}{\operatorname{sen} u} = 2\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{d(\cot u)}{\operatorname{sen} u}.$$

Entonces será preciso integrar por partes. Finalmente:

$$2l = 2\sqrt{2} + 2\left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)_{\pi/4}^{\pi/2} \quad \text{y} \quad l = \sqrt{2} - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right|$$

ya que $\ln 1 = 0$.

Ahora bien

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0{,}414 \quad \text{y} \quad \ln 0{,}414 = \frac{\overline{1}{,}616}{0{,}43} = -\frac{0{,}384}{0{,}43} = -0{,}88.$$

Nota: $\overline{1}{,}616 = -1 + 0{,}616$

$$l = 2{,}293.$$

13-12. $l = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$

$x < 1$, por consiguiente x^4 es muy pequeño o $\to 0$.

Por consiguiente, puede escribirse:

$$(1 + x^4)^{1/2} = 1 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + \ldots$$

$$l = \left[x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72}\right]_0^1 \qquad l \approx 1{,}08.$$

13-13. $l = 6{,}78$.

13-14. Es preciso integrar dos veces desde 0 a $3\pi/2$.

$$l = 2a \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{3}}\, d\theta \qquad l = 3a\pi/2.$$

13-15. Cálculo hecho en el curso, núm. 65, ejemplo 2.°.

13-16. El desarrollo propuesto se escribe:

$$\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^8} + \ldots$$

$$l = \left(x_1 - \frac{1}{6x_1^3} + \frac{1}{56x_1^7} - \ldots\right) - \left(x_0 - \frac{1}{6x_0^3} + \frac{1}{56x_0^7} - \ldots\right)$$

Nota: x_0 y x_1 son las abscisas que definen la longitud de la curva calculada.

13-17. $l = 6a$.

CAPITULO XIV

CALCULO DE VOLUMENES DE REVOLUCION
(alrededor del eje de las x)

14-1. $V = \int_0^h \pi y^2\,dx = \pi \int_0^h (2ax - x^2)\,dx$

$$V = 2\pi a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{\pi x^3}{3}\right]_0^h$$

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3a - h).$$

14-2. $V = 2\pi a h^3$.

14-3. Problema tratado en el curso, núm. 68. Ejemplo, figura número 59.

Con:

$a = a$
$b = R$ $\qquad V = 2\pi^2 a b^2$.

14-4. La figura en el curso para este problema, es falsa. La función $y = Ax^n$ pasa por el origen para $x = 0$. Los cálculos se harán con la figura siguiente:

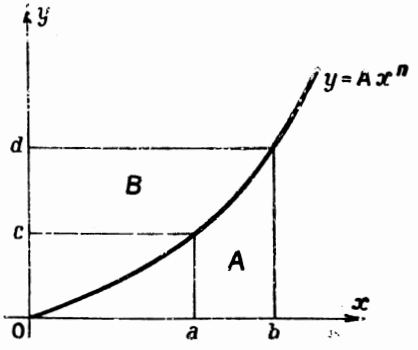


FIG. 14-4

$$V_A = \int_a^b \pi A^2 x^{2n}\, dx = \frac{\pi A^2}{2n+1}\,[x^{2n+1}]_a^b$$

$$V_A = \frac{\pi A^2}{2n+1}\,(b^{2n+1} - a^{2n+1}).$$

14-5. $dV = \pi x^2\, dy.$

Ahora bien:

$$dy = nAx^{n-1}\, dx$$

$$dV = \pi x^2 nAx^{n-1}\, dx = \pi nAx^{n+1}\, dx$$

$$V = \pi nA \int_a^b x^{n+1}\, dx = \frac{\pi nA}{n+2}\,[x^{n+2}]_a^b$$

$$V_B = \frac{\pi nA}{n+2}\,(b^{n+2} - a^{n+2}).$$

14-6. $V = V_1 + V_2$

$$dV_1 = \pi(b^2 - a^2)\, dy, \qquad V_1 = \pi(b^2 - a^2)Aa^n$$

$$dV_2 = \pi(b^2 - x^2)dy.$$

$$V_2 = \int_c^d \pi(b^2 - x^2)\, dy = \pi b^2 A(b^n - a^n) - \frac{\pi An}{n+2}\,(b^{n+2} - a^{n+2})$$

$$V = \frac{2\pi A}{n+2}\,(b^{n+2} - a^{n+2})$$

14-8. Igual problema que el del núm. **14-4.**

$$A = 5, \quad n = 2, \quad a = 1, \quad b = 2$$

$$V_A = 155\pi.$$

14-9. $V_B = 75\pi/2.$

14-10. $V = \dfrac{2\pi A}{n+2}\,(b^{n+2} - a^{n+2}) \qquad V_A = 75\pi/2.$

14-12. $V = \pi \int_1^2 e^{-2x}\, dx$

$$V = \pi \int_1^2 e^{-2x}\left(-\frac{2\, dx}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\,[e^{-2x}]_1^2 = -\frac{\pi}{2}\,(e^{-4} - e^{-2})$$

$$V = \frac{\pi}{2e^2}\,(1 - e^{-2}).$$

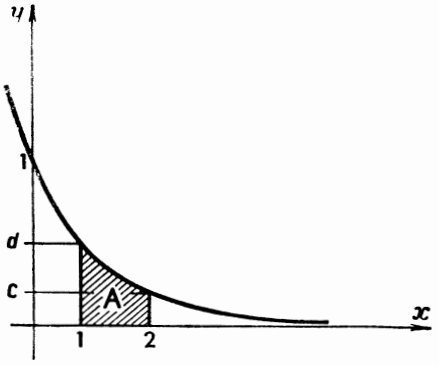


FIG. 14-12

14-13. Es decir, variando y, x varía desde 2 a 1.

$$V = -\pi \int_2^1 x^2 e^{-x}\, dx = \pi \int_1^2 x^2 e^{-x}\, dx.$$

Será preciso integrar por partes dos veces seguidas.

$$V = \frac{5\pi}{e}\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

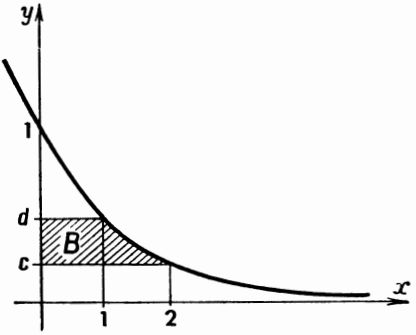


FIG. 14-13

14-14. $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 3\pi[y]_0^C = 3\pi C = 3\pi e^{-2}$ (ya que $dV_1 = \pi y^2\,dy$)

$dV_2 = \pi(x^2 - 1)\,dy = \pi(1 - x^2)\,e^{-2}\,dx$

$$V_2 = \pi \int_2^1 e^{-x}\,dx - \pi \int_2^1 e^{-x} \cdot x^2\,dx$$

$$V_2 = \pi(e^{-2} - e^{-1}) + \pi\left(\frac{5}{e} - \frac{10}{e^2}\right)$$

$$V = \frac{4\pi}{e} - \frac{6\pi}{e^2}.$$

14-16. $V = V_1 - V_2$.

V_1 es el volumen de un cilindro de revolución, de altura $h = 4$ y de radio $R = +6$.

$$V_1 = \pi R^2 h, \qquad V_1 = 144\pi$$

$$V_2 = \int_0^4 \pi y^2\,dx = \pi \int_0^4 (x^4 + 16x^2 - 8x^3)\,dx$$

$$V_2 = \frac{1.024\pi}{30}, \qquad V \approx 110\pi.$$

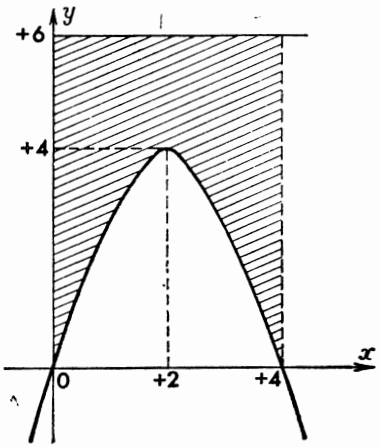


FIG. 14-16

14-17. $V = \frac{\pi}{8}(e^{2\pi} - 1)$.

14-18. $V = \pi \int_0^1 x^6\, dx = \frac{\pi}{7}[x^7]_0^1$

$V = \pi/7$.

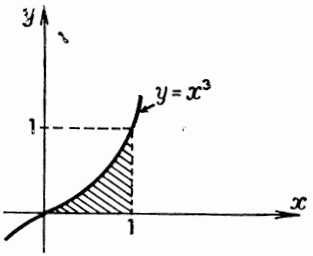


FIG. 14-18

14-19. x varía desde 3 a 4.

$dV = \pi y^2\, dx = \pi[(1 + \sqrt{4 - x})^2 - (1 - \sqrt{4 - x})^2]\, dx$

$dV = \pi(4\sqrt{4 - x})\, dx, \quad V = 4\pi \int_3^4 \sqrt{4 - x}\, dx;$

se pone $4 - x = v$ y v varía desde 1 a 0:

$V = -4\pi \int_1^0 \sqrt{v}\, dv = 4\pi \int_0^1 \sqrt{v}\, dv = 4\pi \cdot 2/3\, [v^{3/2}]_0^1$

$V = 8\pi/3$.

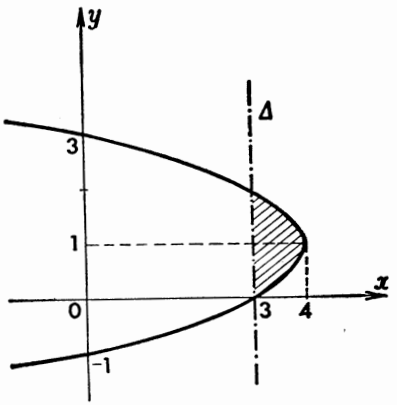


FIG. 14-19

14-20. $V = V_1 - V_2$.

V_1 = Volumen engendrado por la recta,

V_2 = Volumen engendrado por la parábola.

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 - x)^2 \, dx, \qquad V_1 = \pi/3$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^{3/2} + x^2 + 6x - 4x^{1/2} + 1) \, dx$$

$$V = 4\pi/15.$$

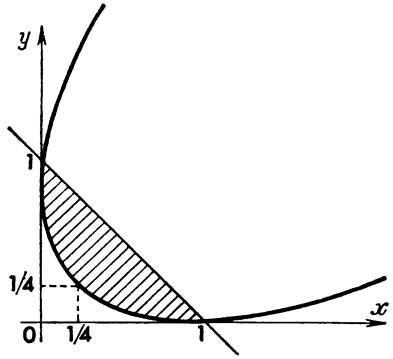


FIG. 14-20

14-21. $V = 9\pi$.

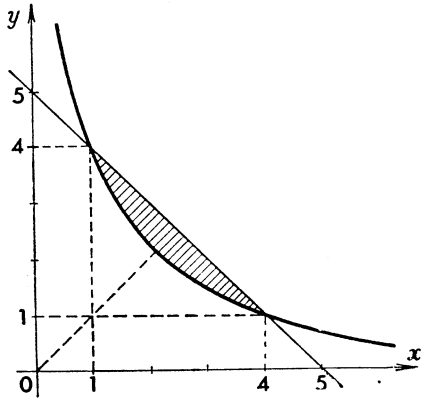


FIG. 14-21

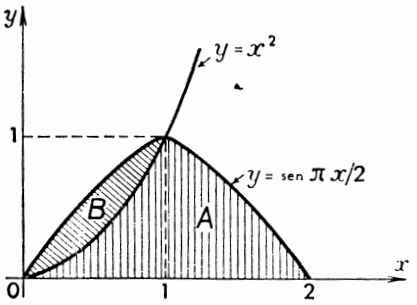


FIG. 14-22

14-22. Este es el volumen engendrado por la superficie A que es preciso calcular:

$$V = \pi \int_0^1 x^4\,dx + \pi \int_1^2 \operatorname{sen}^2(\pi x/2)\,dx$$

$$V = \frac{\pi}{5} + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^2 u\,du \quad \text{poniendo } \pi x/2 = u$$

$$V = \frac{\pi}{5} + \left[u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{5} + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$V = 7\pi/10.$$

14-23. $V = V_1\,(\text{por } y^2 = x) - V_2\,(\text{por } x^2 = y)$

$$V_1 = \pi\int_0^1 y^2\,dx, \qquad V_1 = \pi/2$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 x^4\,dx, \qquad V_2 = \pi/5$$

$$V = 3\pi/10.$$

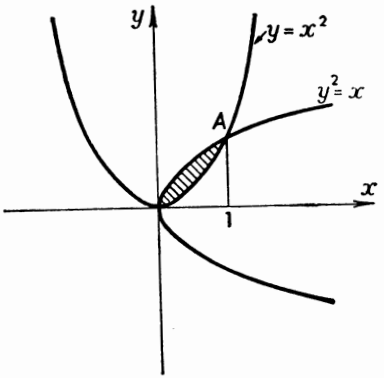


FIG. 14-23

14-25. Consideramos la figura siguiente como conforme al enunciado del problema propuesto. La superficie es la del sector sombreado AOB.

$$\begin{cases} y = -\mathrm{R}\cos\alpha + \mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi \\ x = \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad dx = -\mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{V}}{\pi} = 2\int_0^{\mathrm{R}\operatorname{sen}\alpha} y^2\, dx$$

$$= -2\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\varphi - 2\operatorname{sen}^2\varphi\cos\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Ahora bien: $\operatorname{sen}^3\varphi = 3/4\operatorname{sen}\varphi - 1/4\operatorname{sen}3\varphi$.

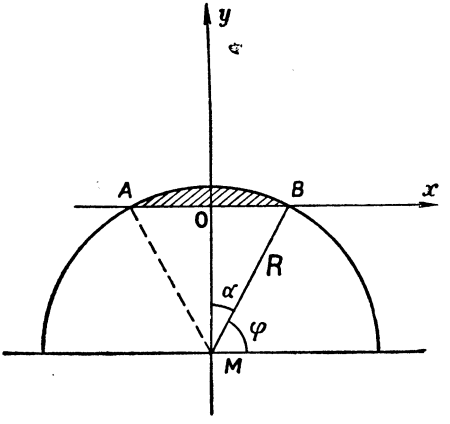


FIG. 14-25

$$\frac{\mathrm{V}}{\pi} = 2\mathrm{R}^3\left[-\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{12}\cos 3\varphi - (\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi)\cos\alpha - \cos^3\alpha\cdot\cos\varphi\right]_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2}$$

$$\mathrm{V} = 2\pi\mathrm{R}^3\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{12}\operatorname{sen}3\alpha - \alpha\cos\alpha\right).$$

Puede verificarse que para $\alpha = \pi/2$ (caso de la esfera): $\mathrm{V} = 4/3\,\pi\mathrm{R}^3$.

CAPITULO XV

SUPERFICIES LATERALES DE VOLUMENES DE REVOLUCION

15-1. $S_l = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \, dl = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$

$$S_l = 2\pi \int_2^4 2\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x}} \, dx = 4\pi\sqrt{2} \int_2^4 \sqrt{x + 2} \, dx$$

$$S_l = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}[(x+2)^{3/2}]_2^4 \qquad S_l \approx 80.$$

15-3. $S_l = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4} \, dy$ se pondrá $y^4 = u$

$$S_l = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 9u} \, du \qquad \text{se pondrá } 1 + 9u = v$$

$$S_l = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} \sqrt{v} \, dv = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3}[v^{3/2}]_1^{10}$$

$S_l \approx 3{,}55.$

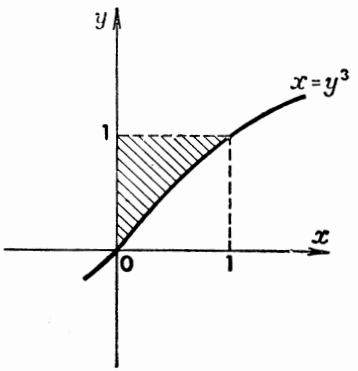


FIG. 15-3

15-4. $S_l = \dfrac{12\pi a^2}{5}$.

15-6. Problema tratado en el curso, núm. 70, ejemplo 4.°.

Observación. — La ecuación diferencial no es la indicada en el texto del núm. **15-6.**

En efecto:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) & \text{y} \quad dx = R(1 - \cos\theta)\, d\theta \\ y = R(1 - \cos\theta) & \text{y} \quad dy = R \operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\, d\theta = \frac{1/R\,\sqrt{2Ry - y^2}}{y/R} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y}.$$

Por consiguiente:

$$y\, dy = (\sqrt{2Ry - y^2})\, dx$$

$$y\, dy = \sqrt{2ay - y^2}\, dx \qquad \text{si} \quad a = R.$$

15-7. $$S_l = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx$$

$$S_l = 4\pi \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx = \frac{8\pi}{3}\left[(1 + x)^{3/2}\right]_0^3$$

$$S_l = \frac{56\pi}{3}.$$

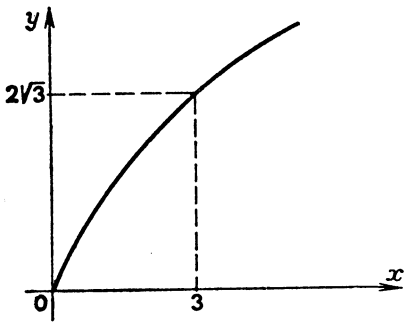


FIG. 15-7

15-8. Se trata de un círculo de radio R = 2,

$$S_l = \int_1^2 2\pi\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \cdot dx = 2\pi R\,[x]_1^2$$

$$S_l = 4\pi.$$

CAPITULO XVI

CENTROS DE GRAVEDAD

16-1. $S = 3\pi R^2$ (se ha considerado que se trataba de la superficie).

$X_G = \pi R$

$Y_G = 5R/6$.

Ver Cálculos del curso, núm. 75, ejemplo 4.°.

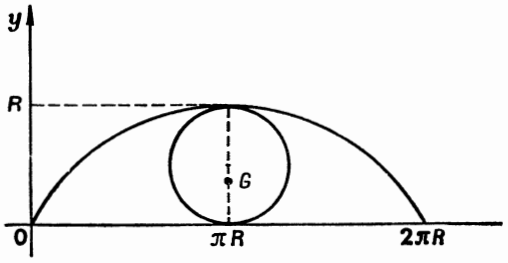


FIG. 16-1

16-2. $Y_G = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_0^{\pi} y\,dx \cdot \frac{y}{2}$.

Ahora bien: $S = \displaystyle\int_0^{\pi} y\,dx = [\cos x]_{\pi}^{0} = 2$

$$Y_G = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi}$$

$Y_G = \pi/8$

$X_G = \pi/2$

...ya que la superficie es simétrica en relación a $\pi/2$.

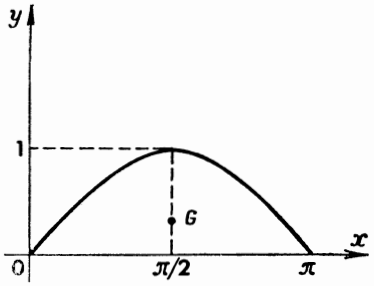


FIG. 16-2

16-3. Punto A: $4x = \left[\frac{x^2}{4}\right]^2$, de donde $x^3 = 64$,

de donde: $x_A = 4$ y $y_A = 4$.

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x^2/4)\,dx, \quad S = 16/3$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_0^4 \frac{1}{2}\left(4x - \frac{x^4}{16}\right)dx$$

$$Y_G = \frac{3}{32}\left[2x^2 - \frac{x^5}{80}\right]_0^4 \qquad Y_G = \frac{9}{5}$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_0^4 xy\,dx = \frac{3}{16}\int_0^4 2x^{3/2}\,dx - \frac{3}{16}\int_0^4 \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{9}{5}$$

$$X_G = Y_G = 9/5.$$

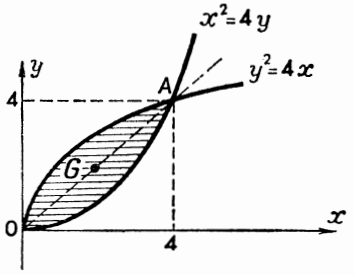


FIG. 16-3

16-4. $X_G = 3/4$

$Y_G = 24/15.$

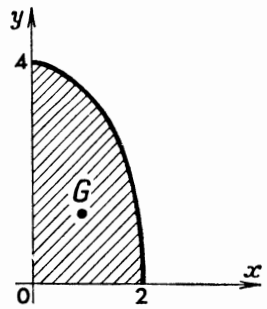


FIG. 16-4

16-6. Como el eje de las x es un eje de simetría para el volumen, el centro de gravedad se encuentra en este eje y:

$$Y_G = 0. \qquad X_G = \frac{\int_0^2 xy^2\,dx}{\int_0^2 y^2\,dx}$$

$$\int_0^1 y^3\,dx = \int_0^3 (16 - 8x^2 + x^4\,dx = 32 \cdot \frac{8}{15}$$

$$\int_0^1 xy^3\,dx = \int_0^2 (16x - 8x^3 + x^5)\,dx = 32/3.$$

$$X_G = \frac{32}{3} \times \frac{15}{32 \cdot 8}. \qquad X_G = 5/8$$

$X_G = 5/8$

$Y_G = 0.$

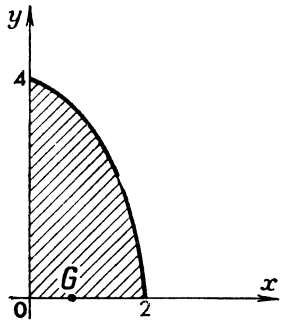


FIG. 16-6

16-8. Ver el curso, núm. 73, ejemplo 4.°.

16-9. Igual ejercicio al del núm. **16-1.**

16-10. Ver el curso, núm. 78, ejemplo 4.°.

VARIOS PROBLEMAS DE INTEGRACION

Problema núm. 1

Sea el círculo $x^2 + y^2 = R^2$

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}.$$

1.º Busquemos la masa del semicírculo:

$$dm = 2\rho x\, dy = 2xKy\, dy, \quad \text{ya que} \quad \rho = Ky$$

$$M = 2K\int_0^R xy\, dy = 2K\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$$

$$M = K\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\, d(y^2).$$

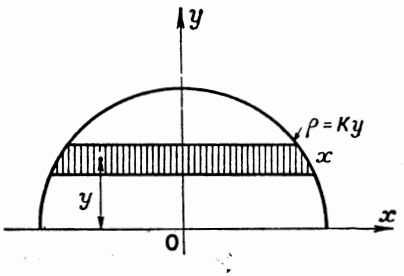
Ponemos $R^2 - y^2 = u$, u variará desde R^2 a 0:

$$M = -K\int_{R^2}^0 \sqrt{u}\, du = K\int_0^{R^2} u^{1/2}\, du = K \cdot 2/3\, [u^{3/2}]_0^{R^2}$$

$$M = K \cdot 2/3\, R^3.$$

2.º Calculemos la densidad media δ:

$$M = \frac{\pi R^2}{2}\delta, \quad \text{de donde} \quad \delta = K \cdot \frac{4R}{3\pi}.$$



Problema núm. 3

$m = 27$ g para $t = 0$,

$m = 8$ g para $t = 3$ horas,

$dm/dt = -Km$ signo «menos», ya que la masa disminuye.

$$dm/m = -K dt \quad \text{y} \quad \int \frac{dm}{m} = -K \int dt,$$

de donde:

$$\ln m = -Kt + C.$$

Por otra parte $\ln m_0 = c$. Por consiguiente $\ln m/m_0 = -Kt$. Utilicemos esta relación.

Sea:

$$\ln 8/27 = -3K, \qquad \ln m/27 = -4K.$$

Por consiguiente:

$$\frac{\ln m/27}{\ln 8/27} = \frac{4}{3}$$

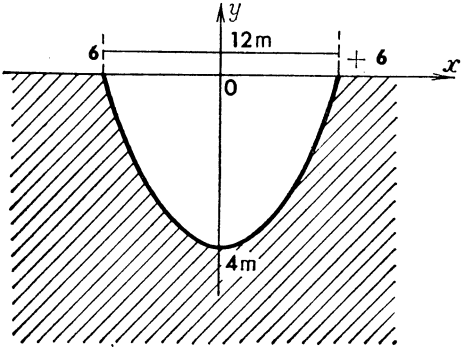
$$\ln \frac{m}{27} = \frac{4}{3} \ln \frac{8}{27} = 4 \ln \left(\frac{8}{27}\right)^{1/3} = 4 \ln \frac{2}{3} = \ln \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\ln \frac{m}{27} = \ln \frac{16}{81} \quad \text{de donde} \quad \frac{m}{27} = \frac{16}{81}$$

$m = 5{,}33$ g al cabo de 4 horas.

Problema núm. 5

Observación. — Observar que el agua no está «dentro» de la



parábola, ya que entonces la presión sería nula sobre la placa. Ecuación de la parábola:

$$y = -4 + \alpha x^2$$

de donde:

$$-4 + 36\alpha = 0, \quad \text{de donde:} \quad y = -4 + x^2/9$$

$$S = 2\int_0^6 y\,dx = 2\int_0^6 (-4 + x^2/9)\,dx, \qquad S = -32.$$

La fuerza es:

$$F = S \times \rho \times g,$$

con ρ: masa específica del agua y g, gravedad. $F = 32\rho \cdot g$.

En el sistema M.K.S.A.:

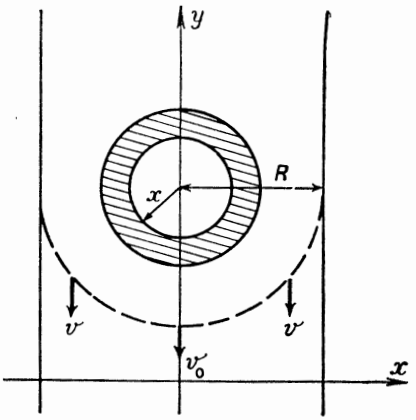
$$\rho = 1 \text{ kg/dm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$F_N = 32.000 \text{ kgp/m}.$$

Siendo F newtons por metro de espesor.

Problema núm. 6

1.º Cálculo de q, salida del tubo. Sea $d\sigma$ la superficie de un anillo de líquido en el que la velocidad es constante.



$$dq = v\,d\sigma = 2\pi x\,dx\,(v_0 - Kx^2)$$

$$q = 2\pi\int_0^R x(v_0 - Kx^2)\,dx = 2\pi\left[v_0 \cdot \frac{x^2}{2} - K\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$

$$q = 2\pi\left[v_0\frac{R^2}{2} - \frac{KR^4}{4}\right] = \frac{\pi R^2}{2}(2v_0 - KR^2).$$

2.° Cálculo de V_m, velocidad media. La salida total es $\pi R^2 V_m$.

$$\pi R^2 V_m = \frac{\pi R^2}{2}(2v_0 - KR^2), \quad \text{de donde} \quad V_m = v_0 - KR^2/2.$$

Salida:

$$q = \frac{\pi R^2}{2}(2v_0 - KR^2).$$

Velocidad media:

$$V_m = v_0 - KR^2/2.$$

Problema núm. 7

$$v = \frac{F}{K}(1 - e^{-(K/m)t})$$

si $F = 0$, $\quad v = v_0 \cdot e^{-(K/m)t}$.

Problema núm. 8

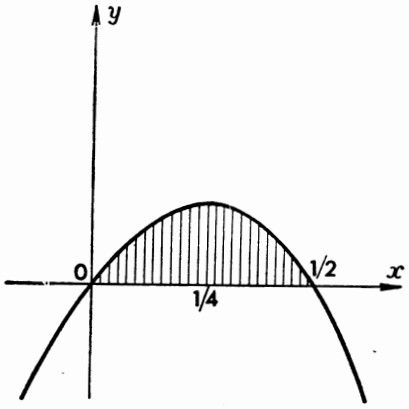
$$S = \int_0^{1/2} (x - 2x^2)\, dx$$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

$$S = 0{,}041\,66 \text{ km}^2.$$

Ahora bien: $\quad 1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2 = 10^{-2} \text{ km}^2$

$$S = 4{,}166 \text{ hectáreas}$$



PARANINFO

MELENDEZ VALDES, 14 y 65
MADRID-15